

KHOA TOÁN CƠ - TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN - ĐHQG HÀ NỘI

Một số
phương pháp chọn lọc
**GIẢI CÁC BÀI TOÁN
SƠ CẤP**

GIÚP LUYỆN THI ĐẠI HỌC
VÀ BỒ DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN

TẬP

2



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHAN ĐỨC CHÍNH - **PHẠM VĂN ĐIỀU** - ĐỖ VĂN HÀ
PHAN VĂN HẠP - PHẠM VĂN HÙNG - PHẠM ĐĂNG LONG
NGUYỄN VĂN MẬU - ĐỖ THANH SƠN - LÊ ĐÌNH THỊNH

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỌN LỌC GIẢI CÁC BÀI TOÁN SƠ CẤP

Tài liệu dùng cho học sinh chuẩn bị thi vào các trường đại học và bồi dưỡng học sinh giỏi toán

TẬP II
(In lần thứ năm)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẦN THỨ NHẤT

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Chương I

HÀM SỐ

§1. Một số khái niệm cơ bản

1. Định nghĩa hàm số.

Giả sử các tập hợp X và Y là miền biến thiên của các đại lượng biến thiên x và y .

Đại lượng biến thiên y được gọi là hàm số của đại lượng biến thiên x nếu ứng với mỗi giá trị $x \in X$ có tương ứng giá trị $y \in Y$ theo một quy tắc f nào đó.

Ta ký hiệu hàm số là $y = f(x)$, trong đó x được gọi là đối số hay biến số độc lập.

Trong chương trình phổ thông ta chỉ xét những hàm số đơn trị, tức là ứng với mỗi giá trị của x chỉ có tương ứng duy nhất một giá trị của y . Về mặt hình học, điều đó có nghĩa là trong miền xác định của hàm số, mọi đường thẳng song song với trục tung chỉ cắt đồ thị hàm số tại duy nhất một điểm.

Có nhiều phương pháp cho một hàm số. Ở chương trình phổ thông thường gặp những hàm số được cho bằng một biểu thức đại số, hoặc lượng giác, hoặc có khi là một số các biểu thức. Ví dụ như

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e},$$

$$y = \sin x + \sin 2x,$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{với } -\infty < x \leq 0 \\ 3x - 1 & \text{với } 0 < x < 2 \\ x + 5 & \text{với } 2 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Nếu trong biểu thức của hàm số $y = f(x)$, ta thay giá trị $x = a \in X$ sẽ được giá trị của hàm số tại a (nếu tại đó hàm số xác định), ký hiệu $f(a)$.

Ví dụ: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{6x - 3}$.

Khi đó $f(2) = \sqrt{6 \cdot 2 - 3} = 3$.

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $f(x) = \cos x$. Hãy tính $f(0) + f(\pi) + f(\pi - \alpha)$.

2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{với } x \leq 0, \\ 2x + 1 & \text{với } 0 < x \leq 4. \end{cases}$

Hãy tính: a) $f(0) + f(1) + f(-1)$; b) $f(5)$.

3. Tính giá trị của hàm số $f(x) = x^4 + 1/x^4$, tại các giá trị của x thoả mãn điều kiện: $x + \frac{1}{x} = 5$.

4. Cho hai hàm số: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$. Hãy tính $f(a + \frac{1}{a}) + g(a - \frac{1}{a})$ với $a > 0$.

2. Miền xác định của hàm số.

Tập hợp X tất cả các giá trị của đối số x để $f(x)$ xác định được gọi là miền xác định (hay khoảng xác định) của hàm số $f(x)$. Có những hàm số xác định với mọi x , ví dụ như các hàm đa thức dạng $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, trong đó $a_0, a_1, \dots, a_n$ là

những số thực, nhưng cũng có những hàm số chỉ xác định với một tập hợp X nào đó, ví dụ $y = \sqrt{x}$ chỉ xác định với $x \geq 0$.

Một hàm số được cho dưới dạng một biểu thức hoặc một số biểu thức (mà không chỉ ra trước các điều kiện đối với x), thì miền xác định của hàm số là tập hợp tất cả các giá trị của x làm cho các phép toán trong biểu thức đồng thời có nghĩa.

Ví dụ 1. Tìm khoảng xác định của hàm số

$$y = \sqrt{(x^2 + x - 12) \log_{1/2}(x + 2)}. \quad (\text{Đề thi ĐH 1987}).$$

Giải: Cách 1. Khoảng xác định của hàm số là tập hợp các giá trị của x thoả mãn hệ

$$\begin{cases} x + 2 > 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 + x - 12) \log_{1/2}(x + 2) \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $x > -2$.

Ta giải bất phương trình (2) bằng cách lập bảng xét dấu của biểu thức:

$$(x^2 + x - 12) \log_{1/2}(x + 2)$$

và thu được nghiệm của hệ, hay cũng là miền xác định của hàm số đã cho, là khoảng: $-1 \leq x \leq 3$.

(Bạn đọc tự lập bảng).

Cách 2. Khoảng xác định của hàm số là tập hợp các giá trị của x thoả mãn 1 trong 2 hệ sau đây:

$$\begin{cases} x + 2 > 0 \\ x^2 + x - 12 \geq 0 \\ \log_{1/2}(x + 2) \geq 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x + 2 > 0 \\ x^2 + x - 12 \leq 0 \\ \log_{1/2}(x + 2) \leq 0 \end{cases} \quad (II)$$

Ta thấy hệ (I) vô nghiệm, còn hệ (II) cho nghiệm $-1 \leq x \leq 3$. Vậy khoảng xác định của hàm số đã cho là $-1 \leq x \leq 3$.

Ví dụ 2. Tìm khoảng xác định của hàm số

$$y = \sqrt{\sin x - 1}.$$

Giải : Hàm số xác định tại những giá trị x thoả mãn điều kiện $\sin x - 1 \geq 0$, hay là $\sin x \geq 1$. Vì $\sin x \leq 1$ với mọi x , nên suy ra hàm số đã cho chỉ xác định tại những điểm thoả mãn $\sin x = 1$ hay là $x = \pi/2 + 2k\pi$.

Chú ý : Như vậy, hàm số đã cho chỉ xác định tại những điểm rời rạc trên trục số.

Ví dụ 3. Tìm khoảng xác định của hàm số :

$$y = \sqrt{-x^2 + 3x - 2} + \sqrt{-x^2 + 5x - 6}.$$

Giải : Khoảng xác định của hàm số là tập hợp các giá trị của x thoả mãn hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} -x^2 + 3x - 2 \geq 0, \\ -x^2 + 5x - 6 \geq 0 \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, & (1) \\ 2 \leq x \leq 3. & (2) \end{cases}$$

Kết hợp các điều kiện (1) và (2) ta được $x = 2$. Vậy hàm số chỉ xác định tại một điểm $x = 2$ (lúc đó $y = 0$).

BÀI TẬP

1. (Thi vào đại học 1970). Tìm khoảng xác định của các hàm số :

a) $y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 5}} + \lg(x^2 - 3x + 2);$

b) $y = \sqrt{\log_{0.8} \left(\frac{2x+1}{x+5} \right)} - 2.$

2. Tìm khoảng xác định của các hàm số :

a) $y = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}; \text{ b) } y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$c) y = \frac{\operatorname{tg} x + \cot x}{\cos 2x}.$$

3. Tìm khoảng xác định của các hàm số:

$$a) y = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x - 1};$$

$$b) y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{1 - x}.$$

4. Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} + \sqrt[3]{-4x^2 + 8x - 3} = 4.$$

5. Tìm khoảng xác định của hàm số

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\log_2(x^2 + 2x - 3)}.$$

3. Miền giá trị của hàm số. Tập hợp tất cả các giá trị của hàm số được gọi là miền giá trị của hàm số.

Biết được miền giá trị của hàm số, đôi khi, ta có thể tìm được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đó.

Ta đã biết hàm số $f(x) = \sin x$ có miền giá trị là đoạn $[-1, 1]$.

Hàm số $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ chỉ có thể nhận những giá trị trên đoạn $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Thật vậy:

$f(x) = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$. Do $|\sin 2x| \leq 1$ nên $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ hay là $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$. Từ đó ta có thể suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là $-\frac{1}{2}$ (đạt được khi $\sin 2x = -1$) và giá trị lớn nhất của hàm số là $\frac{1}{2}$ (đạt được khi $\sin 2x = 1$).

Đối với những hàm số phức tạp hơn, ta có thể tìm được miền giá trị của hàm số nhờ căn cứ vào đặc điểm biểu thức của hàm số hoặc sau khi biểu diễn x theo y .

Ví dụ 1. Tìm miền giá trị của hàm số:

$$y = \cos^2 x + \cos x + 1.$$

Giải : Ta có $\cos^2 x + \cos x + 1 \leq 3$ với mọi giá trị của x (có dấu bằng khi $\cos x = 1$).

Mặt khác: $\cos^2 x + \cos x + 1 = (\cos x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ với mọi giá trị của x (có dấu bằng khi $\cos x = -\frac{1}{2}$). Vậy $\frac{3}{4} \leq y \leq 3$ với mọi giá trị của x . Từ đó suy ra miền giá trị của hàm số đã cho đoạn. $[\frac{3}{4}, 3]$

Đồng thời, ta cũng suy ra được giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3 và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\frac{3}{4}$.

Chú ý: Trong ví dụ trên, sau khi chứng tỏ $\frac{3}{4} \leq y \leq 3$, ta suy ra miền giá trị của y là đoạn $[\frac{3}{4}, 3]$. Thực ra, muốn có kết luận đó cần phải chứng tỏ thêm rằng tập hợp các giá trị của y vét cạn toàn bộ đoạn $[\frac{3}{4}, 3]$, điều này đúng, bởi vì hàm số đã cho liên tục. (Khái niệm về hàm liên tục chúng ta sẽ trình bày ở cuối chương này).

Ta có thể chứng minh kết quả trên bằng cách lấy một giá trị y_0 bất kỳ nào đó thuộc đoạn $[\frac{3}{4}, 3]$ và chứng minh rằng tồn tại x_0 để:

$$\cos^2 x_0 + \cos x_0 + 1 = y_0$$

tức là phải chứng minh phương trình $\cos^2 x_0 + \cos x_0 + 1 = y_0$ luôn có nghiệm với $\frac{3}{4} \leq y_0 \leq 3$. Những bài toán loại này chúng ta sẽ xét trong chương "Tam thức bậc hai".

Trong ví dụ dưới đây, phần ngược lại, bạn đọc hãy tự kiểm tra lấy.

Ví dụ 2. Tìm miền giá trị của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Giải : Cách 1. Hàm số đã cho xác định với mọi $x \neq -1$.

Ta có: $y = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$. Phân số $\frac{3}{x+1}$ nhận tất cả các giá trị.

trừ ra giá trị bằng 0. Thành thử y nhận mọi giá trị, trừ giá trị $y = 2$.

Vậy miền giá trị của hàm số là mọi $y \neq 2$.

Chú ý: Việc chứng tỏ phân số $\frac{3}{x+1}$ nhận mọi giá trị khác không có thể kiểm tra rất đơn giản bằng cách nhận thấy rằng phương trình $\frac{3}{x+1} = k$ luôn luôn có nghiệm với mọi $k \neq 0$.

Cách 2. Xét một giá trị y_0 nào đó thuộc miền giá trị của hàm số. Khi đó, phải tồn tại ít nhất một giá trị $x (x \neq -1)$ sao cho ta có: $y_0 = \frac{2x-1}{x+1}$, hay là $y_0(x+1) = 2x-1$, hay là $(2-y_0)x = 1+y_0$.

Phương trình này phải có nghiệm. Điều này tương đương với $2-y_0 \neq 0$ hay là $y_0 \neq 2$. Như vậy, miền giá trị của hàm số là mọi $y \neq 2$.

Chú ý: Bạn đọc hãy suy ra hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 3. Tìm miền giá trị của hàm số $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Giải: Cách 1. Hàm số đã cho xác định với mọi x .

Ta có $y = \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$. Do $1 \leq x^2+1 < \infty$ với mọi x , nên phân số $\frac{2}{x^2+1}$ nhận mọi giá trị trong khoảng $(0, 2]$.

Từ đó suy ra $y = 1 - \frac{2}{x^2+1}$ nhận mọi giá trị trong khoảng $[-1, 1)$, tức là $-1 \leq y < 1$ với mọi x . Vậy, miền giá trị của hàm số là khoảng $[-1, 1)$.

Cách 2. Xét một giá trị y_0 nào đó thuộc miền giá trị của hàm số. Khi đó tồn tại ít nhất một giá trị x sao cho

$$y_0 = \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

hay là: $y_0(x^2+1) = x^2-1$, hay là: $(1-y_0)x^2 = 1+y_0$.

Phương trình này phải có nghiệm.

Hiển nhiên rằng nếu $1 - y_0 = 0$; tức $y_0 = 1$ thì phương trình này vô nghiệm. Như vậy, ta phải có $1 - y_0 \neq 0$, tức $y_0 \neq 1$.

$$\text{Với } y_0 \neq 1 \text{ ta có } x^2 = \frac{1+y_0}{1-y_0}$$

Muốn phương trình này có nghiệm, ta phải có:

$$\frac{1+y_0}{1-y_0} \geq 0, \text{ từ đó: } -1 \leq y_0 < 1.$$

Vậy, miền giá trị của hàm số là khoảng $[-1, 1)$.

Chú ý: Từ kết quả trên ta suy ra hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất bằng -1 (đạt được khi $x = 0$) và không có giá trị lớn nhất.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = 2\cos^2 \frac{x}{2} + \tan x \cot x$.

a) Tìm miền giá trị của hàm số.

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Giải: Hàm số đã cho xác định với mọi $x \neq k\frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Với miền xác định này, hàm số có dạng:

$$y = 2\cos^2 \frac{x}{2} + 1.$$

Ta có: $1 \leq 2\cos^2 \frac{x}{2} + 1 \leq 3$, với mọi x thuộc miền xác định của hàm số.

Để ý rằng $y = 2\cos^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x + 2$.

Do $x \neq k\frac{\pi}{2}$, nên $\cos x \neq 0$; $\cos x \neq 1$; $\cos x \neq -1$.

Từ đó: $y \neq 1$, $y \neq 2$, $y \neq 3$.

Như vậy, hàm số đã cho nhận mọi giá trị trong các khoảng $(1, 2)$ và $(2, 3)$. Vậy: miền giá trị của hàm số là các khoảng $(1, 2)$; $(2, 3)$. Và căn cứ vào các kết quả ở trên ta suy ra hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

BÀI TẬP

1. Tìm miền giá trị của các hàm số: a) $y = 2^{\sin 2x}$;

b) $y = 2^x + 2^{-x}$; c) $y = \lg x + \cot gx$; d) $y = 2^{\sin x \cdot \cos x}$.

2. Tìm miền giá trị của các hàm số:

a) $y = x^4 + (1-x)^4$; b) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

3. Tìm miền giá trị của các hàm số:

a) $y = \frac{4x+1}{x-2}$; b) $y = \frac{2}{x^2-1}$.

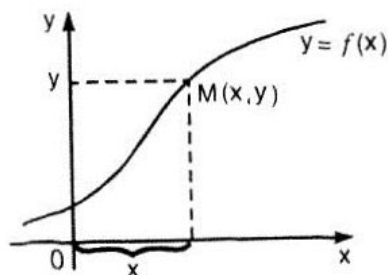
4. Tìm miền giá trị của các hàm số:

a) $y = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$; b) $y = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

(với $0 < x < \frac{\pi}{2}$).

4. Đồ thị của hàm số. Để có cách nhìn khái quát về một hàm số và nhận định một số tính chất đơn giản của hàm số ấy, người ta thường dùng phương pháp biểu diễn hình học một hàm số, tức là vẽ đồ thị của hàm số ấy trên mặt phẳng tọa độ.

Đây cũng là một bài toán thường gặp trong các kỳ thi tuyển vào các trường đại học.



Hình 1

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có miền xác định là X . Tập hợp tất cả các điểm $M(x, y)$ với x thuộc X và $y = f(x)$ được gọi là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. (hình 1).

Nói chung, các hàm số chúng ta đã gặp và thường hay sử dụng đều có đồ thị là một đường cong khá trơn tru (hoặc đường thẳng) trên

mặt phẳng tọa độ.

Tuy nhiên, với một hàm số tổng quát theo định nghĩa ở trên, thì đồ thị của nó nói chung có thể không phải là một đường cong như chúng ta thường quan niệm. Trong ví dụ 3 dưới đây, chúng ta sẽ thấy rằng có hàm số mà đồ thị của nó chỉ là một điểm.

Về vấn đề vẽ đồ thị của một hàm số ta sẽ khảo sát kỹ ở chương II. Ở đây, ta chỉ trình bày một số ví dụ đơn giản.

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = 2^{\log_2 x}$.

Giải: Khoảng xác định của hàm số là mọi $x > 0$. Ta có

$$y = 2^{\log_2 x} = x \text{ với } x > 0.$$

Vậy đồ thị của hàm số là một phần của đường phân giác của góc phần tư thứ nhất (hình 2).

Ví dụ 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^3}{|x|}$.

Giải: Hàm số xác định với mọi $x \neq 0$.

Từ đó, kết hợp với định nghĩa của giá trị tuyệt đối:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0, \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

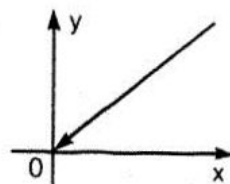
Vậy hàm số đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$$y = \frac{x^3}{|x|} = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Từ đó, suy ra đồ thị của hàm số có dạng (hình 3).

Ví dụ 3. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$.

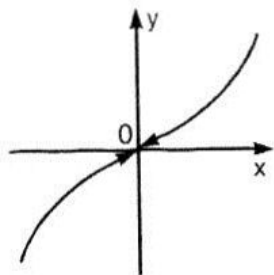
Giải: Miền xác định của hàm số là tập hợp tất cả các giá trị x , thỏa mãn:



Hình 2

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} x \geq 1 & (1) \\ x \leq 1 & (2) \end{cases}$$

Kết hợp (1) và (2) ta được $x = 1$.



Hình 3

Vậy hàm số đã cho chỉ xác định tại một điểm $x = 1$ lúc đó $y = 0$). Từ đó suy ra đồ thị của hàm số chỉ là một điểm trên mặt phẳng tọa độ, đó là điểm A (1, 0).

BÀI TẬP

1. Vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = 2^{|x|}$;

b) $y = 2^{|x|+x}$; c) $y = \sin x + |\sin x|$.

2. Vẽ đồ thị của hàm số: a) $y = 2^{\log_2 x}$; b) $y = 2^{\log_2 x^2}$.

3. Vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \leq 0, \\ (x-1)^2 & \text{nếu } x > 0; \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} |x| & \text{nếu } |x| \leq 1, \\ 2-x^2 & \text{nếu } |x| > 1. \end{cases}$

5. Hàm số phụ thuộc tham số. Trong các kỳ thi tuyển vào đại học, ta thường gặp các hàm số có phụ thuộc tham số $m, a, v.v...$, ví dụ như:

Hàm số $y = \frac{1}{3} x^3 - m(x+1)$ (Khối A năm 1976).

Hàm số $y = (a^2 - 1) \frac{x^3}{3} + (a+1)x^2 + 3x + 5$ (Khối A năm 1977).

Ở đây cần phải hiểu rằng x là đối số còn m, a thuộc tập hợp A nào đó, là tham số (còn gọi là thông số). Như vậy, ta có một họ các hàm số và ứng với mỗi giá trị của tham số ta có một

hàm số cụ thể.

Chú ý rằng khi tham số thay đổi, ta được những hàm số khác nhau và như vậy đồ thị tương ứng của chúng cũng khác nhau.

Ta gọi các đồ thị đó với tham số $\in A$ là một họ các đường cong (phụ thuộc tham số).

Các bài toán quan trọng trong việc nghiên cứu hàm số phụ thuộc tham số bạn đọc sẽ tìm thấy ở những phần sau. Ở đây, xin nêu một ví dụ đơn giản để minh họa.

Ví dụ: Cho hàm số $y = \frac{-x + m - 1}{x - 2}$. Xác định m sao cho:

a) Đồ thị của hàm số đi qua điểm $(1, 2)$. b) Đồ thị của hàm số không cắt trục hoành. c) Hàm số không phụ thuộc vào x .

Giải: a) Hàm số xác định với mọi $x \neq 2$. Muốn đồ thị của hàm số đi qua điểm $(1, 2)$ ta phải có:

$$2 = \frac{-1 + m - 1}{1 - 2}.$$

Từ đó suy ra $m = 0$.

b) Giao điểm của đồ thị với trục hoành có hoành độ là nghiệm của phương trình: $\frac{-x + m - 1}{x - 2} = 0$. Muốn đồ thị của hàm

số không cắt trục hoành thì phương trình $\frac{-x + m - 1}{x - 2} = 0$ (*)

phải vô nghiệm. Phương trình (*) vô nghiệm nếu:

* Hoặc phương trình: $-x + m - 1 = 0$ vô nghiệm.

* Hoặc phương trình: $-x + m - 1 = 0$ chỉ có một nghiệm bằng 2.

Để ý rằng phương trình $-x + m - 1 = 0$ luôn luôn có một nghiệm $x = m - 1$. Vậy để phương trình (*) vô nghiệm ta phải có $x = m - 1 = 2$, hay là $m = 3$. Khi $m = 3$ hàm số đã cho có dạng:

$$y = \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1, \text{ với } x \neq 2.$$

Rõ ràng rằng, lúc đó đồ thị của hàm số không cắt trục hoành.

c) Có hai cách giải câu hỏi này.

Cách thứ nhất. Muốn hàm số đã cho không phụ thuộc vào x thì ta phải có: $y = \frac{-x+m-1}{x-2} = C$ với mọi x thuộc khoảng xác

định của hàm số (C là hằng số nào đó). Tức là ta phải có:

$$-x + m - 1 = C(x - 2), \text{ với mọi } x \neq 2,$$

hay là: $(C + 1)x + (1 - m - 2C) = 0$ với mọi $x \neq 2$.

Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} C + 1 = 0, \\ 1 - m - 2C = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $C = -1$ và $m = 3$. Vậy với $m = 3$ hàm số đã cho không phụ thuộc vào x ($y = -1$ với mọi $x \neq 2$).

Cách thứ hai. Muốn $y = \frac{-x+m-1}{x-2} = C$ với mọi $x \neq 2$ ta phải có $y' = \frac{3-m}{(x-2)^2} = 0$ với $x \neq 2$. Tức là ta phải có $m = 3$.

BÀI TẬP

1. (Đề dự trữ A - 1976) Với những giá trị nào của m , thì đồ thị của hàm số $y = x \left(\frac{x^2}{1-m^2} + 1 + m \right)$ đi qua điểm $\left(1, \frac{8}{3}\right)$.

2. Cho hàm số $y = \frac{mx+2}{x+m-1}$. Xác định m sao cho:

a) Đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 4$.

b) Đồ thị của hàm số không cắt trục hoành.

c) Đồ thị của hàm số không cắt trục tung.

3. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{x-1}$. Xác định m sao cho:

a) Đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ trái dấu.

b) Đồ thị của hàm số chỉ cắt trục hoành tại một điểm.

6. Hàm hợp. Xét hàm số $y = f(x)$ với miền xác định là tập hợp A, giả sử $\varphi(x)$ là một hàm số có miền xác định là tập hợp C và có miền giá trị là tập hợp B. Khi đó, nếu miền giá trị B nằm trong tập hợp A thì biểu thức: $f[\varphi(x)]$ sẽ có nghĩa (với mọi giá trị x thuộc miền xác định C). Ví dụ, cho hàm số $f(x) = x^2$ khi đó biểu thức $f(x + 1)$ có nghĩa là:

$$f(x + 1) = (x + 1)^2.$$

Tương tự: $f(\sin x) = (\sin x)^2,$

$$f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, \text{ với } x \geq 0.$$

Trong khi nhiều bài toán thường gặp, ta cần sử dụng khái niệm hàm hợp. Xét ví dụ sau đây:

Thể tích của hình nón tròn xoay có chiều cao h không đổi là $V = f(x) = \frac{1}{3}hx$, trong đó x là diện tích đáy. Vậy ta nhận được hàm số theo biến x là diện tích của đáy ($x > 0$). Tiếp theo, diện tích đáy x của hình nón là hàm số $x = \varphi(t) = \pi t^2$, trong đó t là bán kính đáy. Vậy thể tích hình nón là hàm hợp:

$$V = f[\varphi(t)] = \frac{1}{3}h[\pi t^2] = \frac{\pi}{3}ht^2.$$

Nhận xét rằng biểu thức $f[\varphi(t)]$ chỉ có nghĩa khi giá trị $\varphi(t)$ thuộc miền xác định của hàm số $f(x)$. Vì vậy, trong nhiều trường hợp, miền xác định của hàm hợp $f[\varphi(t)]$ không trùng với miền xác định của hàm $\varphi(t)$.

Dưới đây, chúng ta sẽ xét một số bài toán liên quan đến hàm hợp, **nhằm** mục đích làm cho bạn đọc thấy được bản chất của hàm hợp và đồng thời hiểu được một cách sâu sắc về khái niệm hàm số.

a) Xác định biểu thức của hàm hợp.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Hãy tính $f\left(\frac{1}{t^2+1}\right)$.

Giải: Ta cần đặt biểu thức $x = \frac{t}{t^2 + 1}$ vào hai vế của đẳng thức $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

$$\text{Ta có: } f\left(\frac{t}{t^2 + 1}\right) = \frac{\frac{t}{t^2 + 1}}{\frac{t}{t^2 + 1} + 1} = \frac{t}{t^2 + t + 1}.$$

$$\text{Vậy: } f\left(\frac{t}{t^2 + 1}\right) = \frac{t}{t^2 + t + 1}.$$

Ví dụ 2. Cho $f(x) = 10^x$. Hãy tính $f(\lg t)$.

Giải: Ta cần đặt biểu thức $x = \lg t$ vào hai vế của đẳng thức $f(x) = 10^x$. Ta có: $f(\lg t) = 10^{\lg t} = t$.

Nhận xét rằng, trong trường hợp này

$$f(\lg t) = t \text{ chỉ xác định khi } t > 0.$$

b) Xác định hàm số khi biết hàm hợp.

Ví dụ 3. Xác định hàm số $f(x)$ biết rằng:

$$f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = x^2 + 2x \quad (x \neq 1).$$

Giải: Đặt $\frac{2x+1}{x-1} = t$. Khi đó: $2x+1 = t(x-1)$

$$\text{hay là: } x = \frac{t+1}{t-2} \quad (t \neq 2).$$

$$\text{Vậy } f(t) = \left(\frac{t+1}{t-2}\right)^2 + 2\left(\frac{t+1}{t-2}\right) = \frac{3t^2 - 3}{(t-2)^2} \quad (t \neq 2).$$

$$\text{Thay đổi ký hiệu } t \text{ bởi } x \text{ ta được: } f(x) = \frac{3x^2 - 3}{(x-2)^2} \quad (x \neq 2).$$

Ví dụ 4. Xác định hàm số $f(x)$ biết rằng:

$$f(x - \sqrt{x^2 - 1}) = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Giải: Vì $(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1$, nên suy ra:

$$x + \sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\text{Vậy } f(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\text{Đặt : } x - \sqrt{x^2 - 1} = t, \text{ suy ra } f(t) = \frac{1}{t}.$$

Ví dụ 5. Xác định hàm số $f(x)$ biết rằng:

$$f(x) + xf(-x) = x + 1. \quad (1)$$

Giải : Từ biểu thức (1) đã cho ta suy ra :

$$f(-x) - xf(x) = -x + 1 \text{ (thay } x \text{ bằng } -x).$$

Nhân cả hai vế của đẳng thức này với $-x$ ta được:

$$-xf(-x) + x^2 f(x) = x^2 - x. \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) tương ứng vế với vế ta được:

$$(x^2 + 1) f(x) = x^2 + 1. \text{ Vậy } f(x) = 1.$$

c) Biến đổi hàm hợp.

Ví dụ 6. Cho hàm số $f\left(\frac{2}{x+1}\right) = x^2 - 1$. Hãy xác định $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Giải : Đặt $\frac{2}{x+1} = \frac{t+1}{t-1}$, khi đó : $2(t-1) = (x+1)(t+1)$,

$$\text{hay là } x = \frac{t-3}{t+1} \text{ (} t \neq -1).$$

$$\text{Suy ra } f\left(\frac{t+1}{t-1}\right) = \left(\frac{t-3}{t+1}\right)^2 - 1 = \frac{(t-3)^2 - (t+1)^2}{(t+1)^2} = \frac{8-8t}{(t+1)^2}.$$

Thay t bởi x ta nhận được:

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{8-8x}{(x+1)^2}.$$

BÀI TẬP

1. Cho $f(x) = x^2$; $\varphi(x) = \cos x$. Hãy xác định $f[\varphi(x)]$ và $\varphi[f(x)]$.

2. Giả sử $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; hãy xác định $f(\frac{1}{x^2})$.

3. Giả sử $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. Hãy xác định $f(\operatorname{tg} x)$.

4. Tìm hàm $f(x)$, nếu biết:

a) $f(x - \frac{a}{x}) = x^2 + \frac{a^2}{x^2}$; b) $f(\sqrt{1+x}) = \sqrt{1+x^2}$;

c) $f(\frac{1}{x}) = 2x - \sqrt{1-2x^2}$; d) $f(1 + \frac{1}{x}) = x^2 - 1$.

5. Giả sử $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chứng minh rằng
 $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) = 0$.

6. Tìm hàm số $f(x)$ nếu biết : a) $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = x$;

b) $(x-1)f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x-1}$.

7. Hãy xác định biểu thức: $f(\frac{x-1}{x})$, biết rằng

$$f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x + 1 - \frac{1}{x}$$

§2 Một số tính chất đặc biệt của hàm số.

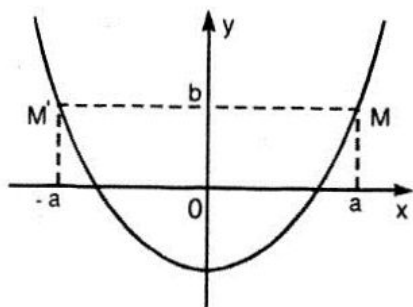
1. Hàm số chẵn và hàm số lẻ.

Một tập hợp số X trên trục số được gọi là đối xứng với điểm $x = 0$ nếu với mọi x thuộc X thì $(-x)$ cũng thuộc X .

Ví dụ: *) X là toàn trục số $(-\infty, +\infty)$;

*) X là đoạn $[-a, a]$.

a) **Hàm số chẵn.** Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu miền xác định X của nó đối xứng đối với điểm $x = 0$ và với



Hình 4

mọi x thuộc miền xác định ta đều có $f(-x) = f(x)$.

Ví dụ, các hàm số $y = 3x^2$, $y = 2x^4 + x^2 - 4$, $y = \cos x$ đều là các hàm số chẵn.

Giả sử điểm $M(a, b)$ thuộc đồ thị của hàm số chẵn $y = f(x)$. Ta thấy $b = f(a)$, đồng thời $f(-a) = f(a) = b$. Vậy điểm $M'(-a, b)$ cũng

thuộc đồ thị của hàm số ấy (hình 4).

Vậy đồ thị hàm số chẵn đối xứng nhau qua trục tung, hay còn nói rằng đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

Qua nhận xét trên, muốn vẽ đồ thị một hàm số chẵn, ta chỉ cần vẽ phần đồ thị nằm bên phải trục tung (tức là phần đồ thị ứng với các giá trị $x \geq 0$) rồi lấy đối ứng phần đồ thị đó qua trục tung ta được phần còn lại của đồ thị.

Liên quan đến khái niệm hàm số chẵn ta có bài toán dạng sau.

Bài toán: Chứng minh rằng đồ thị $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = x_0$ là trục đối xứng.

Cách làm: *) Đặt
$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y. \end{cases}$$

Bằng cách thay biến như thế, ta tịnh tiến song song trục tung về trùng với đường thẳng $x = x_0$.

*) Thay vào biểu thức hàm số: $Y = f(X + x_0)$, ta được biểu diễn tương quan giữa X và Y : $Y = g(X)$.

(Đây chính là phương trình của đồ thị hàm số đã cho trong hệ tọa độ mới khi nhận đường thẳng $x = x_0$ làm trục tung).

*Kiểm tra $Y = g(X)$ là hàm số chẵn. Nếu đó là hàm số chẵn thì đồ thị của nó nhận trục tung (mới), tức là nhận đường

thẳng $x = x_0$ làm trục đối xứng.

b) **Hàm số lẻ.** Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu miền xác định X của nó đối xứng với điểm $x = 0$ và với mọi x thuộc miền xác định ta đều có $f(-x) = -f(x)$.

Ví dụ, các hàm $y = ax^3$, $y = \sin x$ xét trên toàn bộ

trục số, hoặc $y = Ax + \frac{B}{x}$ xét trên toàn bộ trục số trừ điểm $x = 0$ đều là các hàm số lẻ.

Giả sử $M(a, b)$ là một điểm thuộc đồ thị của hàm số lẻ $y = f(x)$. Ta thấy rằng $f(a) = b$, đồng thời $f(-a) = -f(a) = -b$, do đó điểm $M'(-a, -b)$ cũng thuộc đồ thị hàm số ấy (hình 5).

Như vậy đồ thị hàm số lẻ đối xứng nhau qua gốc tọa độ O , nói cách khác, đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Từ nhận xét trên, muốn vẽ đồ thị hàm số lẻ ta chỉ cần vẽ phần đồ thị nằm bên phải trục tung (ứng với $x \geq 0$) rồi lấy đối xứng phần đó qua gốc tọa độ ta được phần còn lại của đồ thị.

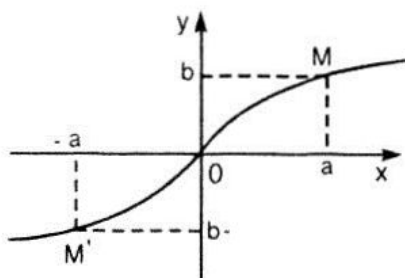
Liên quan đến khái niệm hàm số lẻ, ta có bài toán sau:

Bài toán: Chứng minh rằng đồ thị $y = f(x)$ nhận điểm (x_0, y_0) làm tâm đối xứng.

Cách làm: *) Đặt
$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

Bằng cách thay biến này, ta đã tịnh tiến song song các trục tọa độ đến vị trí sao cho chúng đi qua điểm (x_0, y_0) . Ta được hệ tọa độ mới (X, Y) với gốc tọa độ là điểm (x_0, y_0) .

*) Thay vào biểu thức hàm số: $Y + y_0 = f(X + x_0)$, ta được



Hình 5

biểu diễn tương quan giữa X và Y : $Y = g(X)$.

(Đây chính là phương trình của đồ thị hàm số đã cho trong hệ tọa độ mới).

*) Kiểm tra $Y = g(X)$ là hàm số lẻ. Nếu đó là hàm số lẻ thì đồ thị của nó nhận gốc tọa độ (mới), tức là điểm (x_0, y_0) làm tâm đối xứng.

Từ trên ta thấy điểm $I(x_0, y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị và chỉ khi: Nếu $x_0 + x$ thuộc miền xác định của hàm số thì $x_0 - x$ cũng thuộc miền xác định của hàm số và $[f(x_0 - x) + f(x_0 + x)]/2 = y_0$ (*). Công thức này được vận dụng để giải các bài toán xác định tất cả các tâm đối xứng của đồ thị hoặc chứng minh tính duy nhất của tâm đối xứng.

Ví dụ 1. Xác định tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$; b) $f(x) = \lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$;

c) $f(x) = \sin x + \cos x$.

Giải: a) Hàm số xác định với mọi x ở miền xác định đối xứng với điểm 0.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } f(-x) &= \sqrt[3]{(-x-1)^2} + \sqrt[3]{(-x+1)^2} = \\ &= \sqrt[3]{|-(x+1)|^2} + \sqrt[3]{|-(x-1)|^2} = \\ &= \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = f(x).\end{aligned}$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) Hàm số xác định nếu $\frac{1-x}{1+x} > 0$ hay là $-1 < x < 1$.

Vậy miền xác định đối xứng đối với điểm $x = 0$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } f(-x) &= \lg\left(\frac{1-(-x)}{1+(-x)}\right) = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \\ &= \lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x).\end{aligned}$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) Hàm số xác định với mọi x , suy ra miền xác định đối

xứng với điểm không.

Hàm số này không phải là hàm chẵn, cũng không phải là hàm lẻ. Thật vậy:

Ta có: $f(\pi/4) = \sqrt{2}$, $f(-\pi/4) = 0$. Như vậy $f(-\pi/4) \neq f(\pi/4)$ nên hàm số không phải là hàm số chẵn. $f(-\pi/4) \neq -f(\pi/4)$ nên hàm số không phải là hàm lẻ.

Khi nói đến hàm chẵn hoặc hàm lẻ ta cần phải chú ý đến miền xác định của hàm số đó. Chẳng hạn, hàm số $f(x) = x^2$. Xét trong miền $(0, +\infty)$ không phải là hàm chẵn vì khoảng xác định của nó không đối xứng đối với điểm $x = 0$.

Ta đưa ra một ví dụ phức tạp hơn.

Ví dụ 2. Xác định tính chẵn lẻ của hàm số:

$$f(x) = \frac{x^2|x-2|}{\sqrt{(x-2)^2}}.$$

Giải: Rõ ràng rằng với mọi giá trị thuộc miền xác định của hàm số thì hàm số đã cho có dạng

$$f(x) = x^2.$$

Như vậy, đối với mọi x thuộc miền xác định ta đều có $f(x) = f(-x)$. Song hàm số này không phải là hàm chẵn vì miền xác định của nó không đối xứng đối với điểm $x = 0$ ($x = -2$ thuộc miền xác định, nhưng $x = 2$ không thuộc miền xác định).

Hiển nhiên hàm số đã cho cũng không phải là hàm lẻ.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng mọi hàm số $f(x)$ có miền xác định đối xứng đối với điểm $x = 0$, đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của một hàm chẵn và một hàm lẻ.

Giải: Ta có $f(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$.

Ta sẽ chứng minh rằng $f_1(x) = \frac{1}{2} [f(x) + f(-x)]$ là hàm chẵn

và $f_2(x) = \frac{1}{2} [f(x) - f(-x)]$ là hàm lẻ.

Thật vậy, hiển nhiên rằng các hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ có miền xác định đối xứng đối với điểm $x = 0$. Đồng thời:

$$f_1(-x) = \frac{1}{2} [f(-x) + f(x)] = f_1(x), \text{ suy ra } f_1(x) \text{ là hàm chẵn, và } f_2(-x) =$$

$$\frac{1}{2} [f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2} [f(x) - f(-x)] = -f_2(x), \text{ suy ra } f_2(x) \text{ là hàm lẻ.}$$

Bây giờ, ta xét một bài toán mà cách giải sẽ trở nên đơn giản nếu biết sử dụng tính chẵn, lẻ của một hàm số.

Ví dụ 4. Với những giá trị nào của m thì phương trình $x^2 - |x| + m = 0$ có một nghiệm duy nhất.

Giải: Chú ý rằng $f(x) = x^2 - |x| + m$ là một hàm chẵn. Do đó nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm x_0 thì nó cũng có nghiệm $-x_0$. Vậy, muốn phương trình có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là nghiệm đó phải bằng 0. Thay giá trị $x_0 = 0$ vào phương trình ta nhận được $m = 0$. Song, giá trị $m = 0$ không đủ để phương trình có nghiệm duy nhất, bởi vì lúc đó phương trình đã cho có dạng:

$$x^2 - |x| = 0$$

$$\text{hay là } |x| (|x| - 1) = 0.$$

Phương trình này có ba nghiệm $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Vậy không tồn tại một giá trị nào của m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng đường thẳng $x = 1$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

$$y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x. \quad (1)$$

$$\text{Giải: Cách 1. Đặt } \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y. \end{cases}$$

Thay vào (1) ta được:

$$Y = (X + 1)^4 - 4(X + 1)^3 + 6(X + 1)^2 - 4(X + 1) = X^4.$$

Đây là hàm số chẵn, vậy đường thẳng $x = 1$ là trục đối xứng của đồ thị.

Cách 2. Ký hiệu $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$.

Giả sử $x = x_0$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số đã cho, khi đó nếu lấy hai điểm tùy ý trên đồ thị với hoành độ đối xứng nhau qua x_0 thì các tung độ tương ứng phải bằng nhau, tức là:

$$f(x_0 - x) = f(x_0 + x) \quad (\forall x)$$

hay $(x_0 - x)^4 - 4(x_0 - x)^3 + 6(x_0 - x)^2 - 4(x_0 - x) = (x_0 + x)^4 - 4(x_0 + x)^3 + 6(x_0 + x)^2 - 4(x_0 + x)$ với mọi x hay là $(1 - x_0)x^3 - (x_0^3 - 3x_0^2 + 3x_0 - 1)x = 0$ với mọi x .

Điều này tương đương với $\begin{cases} 1 - x_0 = 0 \\ x_0^3 - 3x_0^2 + 3x_0 - 1 = 0. \end{cases}$

Hệ này có nghiệm duy nhất $x_0 = 1$. Vậy đồ thị có duy nhất một trục đối xứng $x = 1$.

Nhận xét. Phương pháp thứ 2 không những chứng minh được $x = 1$ là trục đối xứng mà còn chứng minh được tính duy nhất của trục đối xứng đó.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = x + 3 - \frac{1}{x-1}$. Chứng minh rằng đồ thị nhận điểm $I(1,4)$ làm tâm đối xứng.

Giải: Đặt $x = X + 1$, $y = Y + 4$ rồi thay vào biểu thức của hàm số $Y + 4 = (X + 1) + 3 - \frac{1}{(X + 1) - 1}$

hay $Y = X - \frac{1}{X}$. Trong hệ toạ độ mới (có gốc toạ độ là $I(1,4)$) hàm số là lẻ, vậy đồ thị của nó nhận điểm $I(1,4)$ làm tâm đối xứng.

Chú ý: Chúng ta cũng có thể dùng công thức (*) để tìm tâm đối xứng của đồ thị và chúng ta sẽ được một tâm đối xứng duy nhất là $I(1,4)$.

Ví dụ 7. Giả sử rằng, hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định. Chứng minh rằng nếu đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tâm đối xứng thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có trục đối xứng.

Giải: Giả sử $I(x_0, y_0)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$, khi đó (theo (*)) đẳng thức

$$f(x_0 - x) + f(x_0 + x) = 2y_0$$

được thoả mãn với mọi x mà hàm số có nghĩa. Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức này, ta được:

$$-f'(x_0 - x) + f'(x_0 + x) = 0$$

hay $f'(x_0 - x) = f'(x_0 + x)$.

Như vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = x_0$ làm trục đối xứng.

Ví dụ 8. Giả sử rằng, hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm của miền xác định. Chứng minh rằng nếu hàm số $y = f(x)$ có trục đối xứng $x = x_0$ thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ sẽ có tâm đối xứng.

Giải: Giả sử $x = x_0$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Khi đó đẳng thức

$$f(x_0 - x) = f(x_0 + x)$$

được thoả mãn với mọi giá trị x mà hàm số có nghĩa. Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức, ta được:

$$-f'(x_0 - x) = f'(x_0 + x)$$

hay là
$$\frac{f'(x_0 - x) + f'(x_0 + x)}{2} = 0 \quad (\forall x)$$

Vậy điểm $I(x_0, 0)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

BÀI TẬP

1. Xác định tính chẵn lẻ của các hàm số:

a) $y = 2x^3 + 3x$; d) $y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$;

b) $y = \sqrt{x-1}$; e) $y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$;

c) $y = x + \operatorname{tg} x$; g) $y = \lg(x + \sqrt{1+x^2})$

2. Cho $\varphi(x)$ là hàm lẻ; $\psi(x)$ là hàm chẵn. Hỏi $f(x) = \varphi[\psi(x)]$ là hàm gì?

3. Chứng minh rằng: a) Tổng của các hàm số chẵn là một hàm số chẵn; b) Tổng của các hàm số lẻ là một hàm số lẻ; c) Tích của hai hàm số chẵn là một hàm số chẵn; d) Tích của hai hàm số lẻ là một hàm số chẵn; e) Tích của một hàm số chẵn với một lẻ là một hàm số lẻ.

4. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc miền xác định. Chứng minh rằng : a) nếu $f(x)$ là hàm chẵn, thì $f'(x)$ là hàm lẻ ; b) nếu $f(x)$ là hàm lẻ, thì $f'(x)$ là hàm chẵn.

5. Với những giá trị nào của a và b thì phương trình :

$$\sqrt[3]{(ax+b)^2} + \sqrt[3]{(ax-b)^2} + \sqrt[3]{(a^2x^2-b)^2} = \sqrt[3]{b}$$

có một nghiệm duy nhất.

6. Chứng minh rằng đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$ nhận điểm

(1,2) làm tâm đối xứng.

7. Xác định tất cả các tâm đối xứng của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

8. Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 + (m+1)x - m + 1}{x - m}.$$

có một tâm đối xứng. Xác định tọa độ tâm đối xứng.

9. Chứng minh rằng đường thẳng $x = 1$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1$.

10. Cho hàm số $y = \frac{x+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$ và $ad - bc \neq 0$.

a) Với điều kiện nào thì đồ thị hàm số có một cặp điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ?

b) Chứng minh rằng nếu đồ thị của hàm số có hai cặp điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ thì gốc tọa độ là tâm đối xứng của đồ thị.

11. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm liên hệ giữa a, b, c, d sao cho đồ thị hàm số có vô số tâm đối xứng.

2. Hàm số đồng biến và nghịch biến

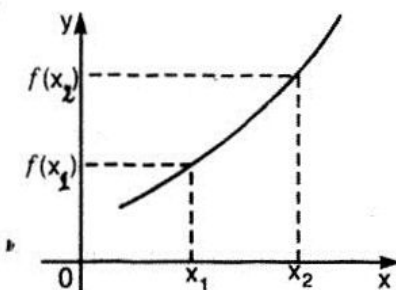
a) **Định nghĩa.** Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *đồng biến trên khoảng* (a, b) , nếu với mọi điểm x_1 và x_2 thuộc khoảng ấy mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$. Ngược lại, nếu $x_1 < x_2$ mà $f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số $y = f(x)$ được gọi là *nghịch biến trên* (a, b) .

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng (a, b) còn được gọi là hàm số đơn điệu trên khoảng đó.

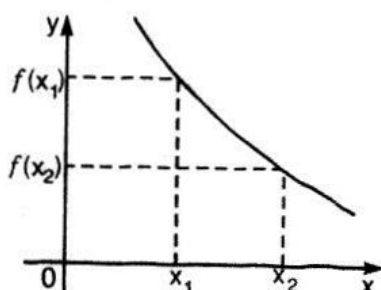
Từ định nghĩa của các hàm số đơn điệu, ta thấy rằng đồ thị của chúng đi lên về phía bên phải (đối với hàm số đồng biến) hoặc đi xuống về phía bên phải (đối với hàm số nghịch biến).

Ví dụ 1. Dựa vào định nghĩa hãy chứng minh rằng hàm số $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ đồng biến trong khoảng $(0, 1)$ và nghịch biến trong khoảng $(1, +\infty)$.

Giải: Ta cần chứng minh rằng khi $0 < x_1 < x_2 < 1$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.



Hình 6



Hình 7

tức là: $\frac{2x_1}{x_1^2 + 1} < \frac{2x_2}{x_2^2 + 1}$ và khi $1 < x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$,

tức là: $\frac{2x_1}{x_1^2 + 1} > \frac{2x_2}{x_2^2 + 1}$.

$$\begin{aligned} \text{Xét hiệu: } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{2x_1}{x_1^2 + 1} - \frac{2x_2}{x_2^2 + 1} = \\ &= \frac{2(x_1 + x_1x_2^2 - x_2 - x_1^2x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} = \frac{2(x_2 - x_1)(x_1x_2 - 1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} \end{aligned}$$

Từ đó, ta thấy rằng nếu $x_2 > x_1$, thì dấu của hiệu $f(x_1) - f(x_2)$ trùng với dấu của biểu thức $x_1x_2 - 1$.

1) Nếu $0 < x_1 < x_2 < 1$ thì $x_1x_2 < 1$, tức là $x_1x_2 - 1 < 0$.
Từ đó, $f(x_1) - f(x_2) < 0$, hay là $f(x_1) < f(x_2)$.

2) Nếu $1 < x_1 < x_2$ thì $x_1x_2 > 1$, tức là $x_1x_2 - 1 > 0$. Từ đó
 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, hay là $f(x_1) > f(x_2)$.

Từ đó, ta được điều phải chứng minh.

Chú ý: Từ định nghĩa ta có thể chứng minh được:

1) Nếu các $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đồng biến trên tập hợp X thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ cũng đồng biến trên X .

2) Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên tập hợp X , thì hàm số $y = -f(x)$ nghịch biến trên X .

3) Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có dấu không đổi trên tập hợp X ,
thì hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$ là nghịch biến trên X .

4) Nếu các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đồng biến và dương trên tập hợp X , thì hàm số $y = f(x).g(x)$ đồng biến trên X .

b) Liên hệ giữa tính đồng biến và nghịch biến với đạo hàm của hàm số.

Cho trước một hàm số, dựa vào định nghĩa để kiểm tra trực tiếp tính đơn điệu của nó thường khá phức tạp. Vì vậy,

người ta thường dùng phương pháp gián tiếp, dựa vào đạo hàm của hàm số ấy (nếu đạo hàm tồn tại).

Cơ sở của phương pháp này là định lý sau đây :

Định lý. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng (a, b) và có đạo hàm tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

1) Nếu $f'(x) > 0$ tại mọi điểm x thuộc khoảng (a, b) , thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng đó. 2) Nếu $f'(x) < 0$ tại mọi điểm x thuộc khoảng (a, b) , thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng đó. 3) Nếu $f'(x) = 0$ tại mọi điểm x thuộc khoảng (a, b) , thì hàm số không đổi trong khoảng đó.

Chú ý rằng định lý trên chỉ nêu lên một điều kiện đủ để hàm số là đồng biến hay nghịch biến. Đó không phải là điều kiện cần. Thật vậy, ta dễ thấy hàm số $f(x) = x^3$ là đồng biến trên toàn trục số. Song đạo hàm của nó $f'(x) = 3x^2$ dương khi $x \neq 0$, còn khi $x = 0$, thì $f'(x) = 0$.

Cần chú ý kết quả sau đây:

Ví dụ 2. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ luôn luôn đồng biến là $y' \geq 0$, với mọi x .

Giải: Ta có $y' = 3x^2 + 2ax + b$. (1)

Tam thức bậc hai này có biệt số $\Delta' = a^2 - 3b$.

1) Nếu $\Delta' < 0$, thì $y' > 0$ với mọi x , vậy y luôn luôn đồng biến.

2) Nếu $\Delta' = 0$, thì $y' > 0$ khi $x < -\frac{a}{3}$ và khi $x > -\frac{a}{3}$, như vậy

hàm số y đồng biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{a}{3})$; $(-\frac{a}{3}; +\infty)$, tức là y luôn luôn đồng biến.

3) Nếu $\Delta' > 0$, lúc đó tam thức (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) và $y < 0$ khi $x_1 < x < x_2$, như vậy hàm số y nghịch biến trên khoảng (x_1, x_2) .

Qua việc xét ba trường hợp trên, ta thấy rằng điều kiện cần và đủ để hàm số đã cho luôn luôn đồng biến là $y' \geq 0$ với mọi x .

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - \frac{mx^2}{2} - 2x + 1$. Xác định m để:

a) Hàm số luôn luôn đồng biến. b) Hàm số luôn luôn đồng biến trong khoảng $(1, +\infty)$. c) Hàm số $g(x) = x^2 - 1 > 0$ trong khoảng đồng biến của hàm số đã cho.

Giải: a) Muốn hàm số đã cho luôn luôn đồng biến ta phải có $y' = x^2 - mx - 2 \geq 0$ với mọi x (xem ví dụ 2).

Tam thức $f(x) = x^2 - mx - 2$ có biệt số $\Delta = m^2 + 8 > 0$ với mọi m nên tam thức luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Vậy không thể xảy ra trường hợp $y' = x^2 - mx - 2 \geq 0$ với mọi x ($y' < 0$ khi $x_1 < x < x_2$). Tức hàm số đã cho không thể luôn luôn đồng biến.

b) Muốn hàm số luôn luôn đồng biến trong khoảng $(1, +\infty)$ thì ta phải có $y' \geq 0$ trong khoảng $(1, +\infty)$.

Hay là: $y' = x^2 - mx - 2 \geq 0$, với mọi $x > 1$. Do $f(x) = x^2 - mx - 2$ luôn luôn có hai nghiệm phân biệt, nên điều kiện trên tương đương với: cả hai nghiệm của tam thức $f(x)$ đều bé hơn hoặc bằng 1.

Tức là ta phải có:

$$\begin{cases} af(1) \geq 0 \\ \frac{S}{2} = -\frac{b}{2a} < 1 \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} -m-1 \geq 0 \\ \frac{m}{2} < 1 \end{cases}$$

hay là
$$\begin{cases} m \leq -1 \\ m < 2. \end{cases}$$

Vậy với $m \leq -1$ thì hàm số đồng biến trong khoảng $(1, +\infty)$.

c) Để ý rằng y' có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 8}}{2}; \quad x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 8}}{2}$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trong các khoảng:

$$x < x_1 \text{ hoặc } x_1 > x_2$$

Muốn $g(x) = x^2 - 1 > 0$ trong các khoảng đồng biến của hàm số đã cho, thì điều kiện cần và đủ là số -1 và số 1 phải nằm trong đoạn hai nghiệm $[x_1, x_2]$ của tam thức $y' = f(x) = x^2 - mx - 2$.

Tức là ta phải có:

$$\begin{cases} af(-1) \leq 0, \\ af(1) \leq 0, \end{cases}$$

hay là
$$\begin{cases} m - 1 \leq 0' \\ -m - 1 \leq 0. \end{cases}$$

Từ đó, $-1 \leq m \leq 1$.

Vậy với $-1 \leq m \leq 1$ thì $g(x) = x^2 - 1 > 0$ trong các khoảng đồng biến của hàm số đã cho.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \frac{x}{x-m}$. Với những giá trị nào của m thì: a) Hàm số luôn luôn đồng biến trong từng khoảng xác định của nó? b) Hàm số đồng biến khi $x \geq -1$?

Giải: a) Ta có $y' = \frac{-m}{(x-m)^2}$ với mọi $x \neq m$.

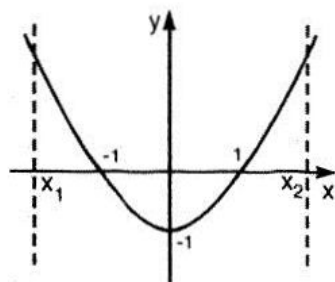
Muốn hàm số luôn luôn đồng biến trong từng khoảng xác định của nó (tức trong các khoảng $(-\infty, m)$; $(m, +\infty)$) thì ta phải

có $y' = \frac{-m}{(x-m)^2} > 0$ với mọi $x \neq m$.

Tức ta phải có $m < 0$.

Chú ý. Một số học sinh thường mắc sai lầm khi khẳng định rằng: nếu $m < 0$, thì hàm số đã cho luôn luôn đồng biến trong toàn khoảng xác định của nó. Thực ra không tồn tại một giá trị nào của m thoả mãn điều kiện đó. Bạn đọc hãy giải thích tại sao?

b) Muốn hàm số đồng biến khi $x \geq -1$ thì ta phải có:



Hình 8

$$\begin{cases} y' = \frac{-m}{(x-m)^2} > 0 \text{ với mọi } x \geq -1 \\ m < -1 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

Tức ta phải có: $\begin{cases} m < 0 \\ m < -1 \end{cases}$ hay là $m < -1$.

Vậy với $m < -1$, thì hàm số đã cho đồng biến khi $x \geq -1$.

Chú ý: Đa số học sinh thường quên đặt điều kiện (2). Điều kiện (2) phải có để hàm số đã cho được xác định và có đạo hàm khi $x \geq -1$.

c) Một số ứng dụng về tính đơn điệu của hàm số.

Tính chất đồng biến và nghịch biến của hàm số có nhiều ứng dụng quan trọng trong việc khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số, tìm miền giá trị của hàm số, tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số, chứng minh các bất đẳng thức và giải các loại phương trình không mẫu mực.

Dưới đây là một số ví dụ.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng nếu $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ thì:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta}.$$

Giải: Xét hàm số $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ xác định trong khoảng $(0, \pi/2)$.

Ta có:

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{x^2 \cdot \cos^2 x}.$$

Gọi $g(x) = x - \sin x \cdot \cos x$: hàm số này cũng xác định trong khoảng $(0, \pi/2)$.

Và trong khoảng này ta có

$$\sin x \cos x < \sin x < x.$$

Như vậy $g(x) = x - \sin x \cos x > 0$ với mọi x thuộc khoảng $(0, \pi/2)$.

Từ đó suy ra $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc khoảng $(0, \pi/2)$. Như vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0, \pi/2)$. Từ đó suy ra với mọi α, β , sao cho $0 < \alpha < \beta < \pi/2$, ta đều có: $f(\alpha) < f(\beta)$, tức là:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta}.$$

Ví dụ 6. Giải phương trình $2^x + 3^x + 5^x = 38$.

Giải: Để ý rằng với $x = 2$ ta có:

$$2^x + 3^x + 5^x = 2^2 + 3^2 + 5^2 = 38.$$

Vậy $x = 2$ là một nghiệm. Ta chứng minh rằng phương trình không có nghiệm nào khác. Thật vậy, các hàm số mũ $y = 2^x$; $y = 3^x$; $y = 5^x$ có cơ số lớn hơn 1 nên chúng đồng biến. Vậy:

* Nếu $x < 2$ thì: $2^x + 3^x + 5^x < 2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$, nên các giá trị $x < 2$ không thể là nghiệm của phương trình.

* Nếu $x > 2$ thì: $2^x + 3^x + 5^x > 2^2 + 3^2 + 5^2 = 38$, nên các giá trị $x > 2$ cũng không thể là nghiệm của phương trình. Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 7. Xác định các giá trị a và b , sao cho bất phương trình: $\sqrt{x} - \sqrt{x-a} > b$ có nghiệm.

Giải: Điều kiện để bất phương trình có nghĩa là $x \geq 0$ và $x \geq a$.

Nếu $a = 0$. Bất phương trình có dạng:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x} > b$$

Rõ ràng rằng khi $b < 0$, bất phương trình này có nghiệm (nghiệm là mọi $x \geq 0$).

Xét trường hợp $a \neq 0$. Khi đó, ta phân thành hai trường hợp:

1) Giả sử $a > 0$:

$$\text{Xét hàm số } y = \sqrt{x} - \sqrt{x-a} = \frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{x-a}}.$$

Hàm số này xác định với mọi $x \geq a$; đồng thời chú ý rằng $y > 0$, với mọi $x \geq a$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-a}} = \frac{\sqrt{x-a} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x(x-a)}} < 0 \text{ với mọi } x > a.$$

Vậy ta có bảng biến thiên:

x	a	$+\infty$
y'		
y	$\sqrt{a}$	0

Bảng 1

Vậy để bất phương trình đã cho có nghiệm (tức tồn tại x để $\sqrt{x} - \sqrt{x-a} > b$) thì ta phải có $b < \sqrt{a}$.

2) Giả sử $a < 0$:

$$\text{Xét hàm số } y = \sqrt{x} - \sqrt{x-a} = \frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{x-a}}.$$

Hàm số này xác định với mọi $x \geq 0$; đồng thời chú ý rằng $y < 0$, với mọi $x \geq 0$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{\sqrt{x-a} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x(x-a)}} > 0 \text{ với mọi } x > 0.$$

Vậy ta có bảng biến thiên (bảng 2).

Vậy để bất phương trình đã cho có nghiệm (tức tồn tại x để $\sqrt{x} - \sqrt{x-a} > b$) thì ta phải có $b < 0$.

Tóm lại bất phương trình đã cho có nghiệm nếu:

x	0	$+\infty$	hoặc	$\begin{cases} a = 0, \\ b < 0; \end{cases}$
y'	+		hoặc	$\begin{cases} a > 0, \\ b < \sqrt{a}; \end{cases}$
y	$\sqrt{a}$	0	hoặc	$\begin{cases} a < 0, \\ b < 0. \end{cases}$

Bảng 2

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = 2x + \sin x + \cos x$ luôn luôn đồng biến với mọi x .

2. Tìm điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x + x$ luôn luôn đồng biến với mọi x .

3. Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + (m^2 + m + 1)$

a) Chứng minh rằng hàm số không thể luôn luôn đồng biến.

b) Với những giá trị nào của m thì hàm số đồng biến khi $x \geq 2$?

4. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx + 1$. Với những giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trong khoảng $(0, \frac{1}{2})$?

5. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m}{x - m}$. Với những giá trị nào của m , thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2, +\infty)$?

6. Cho hàm số $y = (x + m)(x - m)$. Với những giá trị nào của m thì: a) hàm số luôn luôn nghịch biến trong từng khoảng xác định của nó? b) hàm số nghịch biến trong khoảng $(-\infty, 1)$?

7. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - x - 2 = 0$ có một nghiệm duy nhất. Gọi nghiệm đó là x_0 . Chứng minh rằng $x_0 > \sqrt[9]{8}$.

8. Giải các phương trình: a) $3^x + 4^x = 5^x$

b) $4^x + 9^x + 16^x = 81^x$.

9. Chứng minh rằng với mọi a phương trình $x = a + \sin(a+x)$ có một nghiệm duy nhất.

10. Với những giá trị nào của m , thì bất phương trình $2\sqrt{x+1} > x+m$, có nghiệm.

11. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $x > \sin x$ với $x > 0$.

b) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$ với $x \neq 0$.

12. Giả sử $0 \leq a \leq x_1 \leq x_2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[n]{x_2} - \sqrt[n]{x_1} \leq \sqrt[n]{x_2 - a} - \sqrt[n]{x_1 - a}$$

(n là số nguyên dương).

13. Giả sử $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Chứng minh rằng:

$$|x_1^k - x_0^k| + |x_2^k - x_1^k| + \dots + |x_n^k - x_{n-1}^k| \leq |a|^k + |b|^k$$

(k là số nguyên dương).

14. a) giả sử $0 < \alpha < 1$; $0 < \beta < 1$.

Chứng minh rằng: $(1 + \alpha)\beta \leq 1 + \alpha\beta$.

b) Cho $a > 0$, $b > 0$. Chứng minh rằng $a^b + b^a > 1$.

3. Hàm số tuần hoàn.

a) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là *hàm số tuần hoàn* nếu có một số $T > 0$, sao cho với mọi x thuộc miền xác định của hàm số ta luôn có:

- (1) $x + T$ cũng thuộc miền xác định của hàm số;
- (2) $x - T$ cũng thuộc miền xác định của hàm số;
- (3) $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Số $T > 0$ như vậy được gọi là *chu kỳ* của hàm tuần hoàn. Chu kỳ nhỏ nhất, nếu tồn tại, được gọi là *chu kỳ cơ sở* của hàm số.

Nếu T là chu kỳ của một hàm số nào đó, thì nT , $n = 1, 2, \dots$ cũng sẽ là chu kỳ của nó. Nếu T_0 là chu kỳ cơ sở của một hàm số nào đó thì chu kỳ bất kỳ của hàm số này đều có dạng nT_0 , $n = 1, 2, \dots$

Không phải hàm số tuần hoàn nào cũng có chu kỳ cơ sở. Ví dụ hàm số $f(x) = 2$, $-\infty < x < +\infty$, là hàm tuần hoàn với chu kỳ là một số dương bất kỳ, nhưng nó không có chu kỳ cơ sở vì tập hợp các số dương không có số bé nhất.

Từ định nghĩa ta thấy rằng, nếu hàm tuần hoàn $f(x)$ không xác định tại điểm x_0 thì nó không xác định tại tất cả các điểm dạng $x_0 \pm nT$, trong đó $n = 1, 2, \dots$, còn T là chu kỳ của hàm $f(x)$. Vì vậy một hàm số bất kỳ xác định trên toàn trục số trừ

ra một số hữu hạn điểm không thể là hàm tuần hoàn. Ví dụ hàm $\sin \frac{1}{x}$ không là tuần hoàn vì nó xác định tại mọi điểm $-\infty < x < +\infty$, trừ điểm $x = 0$.

Cũng từ định nghĩa suy ra rằng nếu hàm số không xác định, ví dụ với mọi $x \geq a$ hoặc $x \leq a$, thì nó không tuần hoàn. Ví dụ hàm $f(x) = \sin \sqrt{x}$, chỉ xác định với $x \geq 0$, không là hàm tuần hoàn.

Nếu hàm $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0 thì hàm $f(ax)$ ($a \neq 0$) cũng tuần hoàn và có chu kỳ cơ sở là $\frac{T_0}{|a|}$. Ví dụ, các

hàm $\sin ax, \cos ax$ ($a \neq 0$) tuần hoàn với chu kỳ cơ sở $\frac{2\pi}{|a|}$.

Nếu hai hàm tuần hoàn $f_1(x), f_2(x), x \in X$, có cùng một chu kỳ T , thì tổng, hiệu, tích của chúng cũng sẽ là hàm tuần hoàn với chu kỳ T . Tuy nhiên điều khẳng định này nói chung không đúng đối với chu kỳ cơ sở T_0 . Ví dụ hàm $f(x) = \sin x \cos x$ là tích của hai hàm tuần hoàn với cùng chu kỳ cơ sở 2π lại có chu kỳ cơ sở là π (vì $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$).

Nếu các hàm tuần hoàn $f_1(x), f_2(x), x \in X$, có các chu kỳ thông ước với nhau T_1, T_2 (tức là tồn tại hai số tự nhiên m và n sao cho $mT_1 = nT_2$) thì chúng có chu kỳ chung (cụ thể là số $T = mT_1 = nT_2$). Xem thêm ví dụ 6 dưới đây.

Nếu các chu kỳ của các hàm $f_1(x)$, và $f_2(x), x \in X$ vô ước với nhau thì hàm $f_1(x) + f_2(x)$ là không tuần hoàn.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hàm $\cos^2 x$ tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở của nó.

Giải: Vì hàm $\cos^2 x$ là tích của hai hàm tuần hoàn $\cos x$ với chu kỳ 2π , nên nó là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Dễ thấy π sẽ là chu kỳ cơ sở của nó. Thật vậy với mọi x ta có $\cos^2(x + \pi) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$.

Hơn nữa vì $\cos^2 0 = \cos^2 \pi = 1$ và $\cos^2 x < 1$ với mọi $x : 0 < x < \pi$, nên π là chu kỳ nhỏ nhất của hàm $\cos^2 x$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ là hàm tuần hoàn.

Giải: Hàm số xác định với mọi $x \neq -\frac{\pi}{2} + k.2\pi$.

Từ đó suy ra rằng nếu điểm x thuộc miền xác định của hàm số, thì các điểm $x + 2\pi$ và $x - 2\pi$ cũng thuộc miền xác định của hàm số. Như vậy điều kiện (1) và (2) được thoả mãn. Ta kiểm tra tiếp điều kiện (3).

$$\text{Ta có: } f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\pi)}{1 + \sin(x + 2\pi)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} = f(x) \text{ với mọi } x.$$

Vậy $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = |\sin x|$ là hàm tuần hoàn.

Giải: Miền xác định của $f(x)$ là toàn trục số, nên với mọi x , các điểm $x + \pi$ và $x - \pi$ cũng thuộc miền xác định của hàm số.

$$\text{Ta có: } f(x + \pi) = |\sin(x + \pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x).$$

Vậy: $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x)$ có tính chất: tồn tại một số $a \neq 0$ sao cho nếu $f(x)$ xác định thì $f(x + a)$ cũng xác định và

$$f(x + a) = \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1}.$$

Chứng minh rằng $f(x)$ là một hàm tuần hoàn. Hãy nêu ra một ví dụ về hàm số $f(x)$ có tính chất trên.

Giải: Trong hệ thức: $f(x + a) = \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1}$ thay x bởi $x + a$ ta được:

$$f(x + 2a) = \frac{f(x + a) - 1}{f(x + a) + 1} = \frac{\frac{f(x) - 1}{f(x) + 1} - 1}{\frac{f(x) - 1}{f(x) + 1} + 1} = -\frac{1}{f(x)}$$

Trong hệ thức này, lại thay x bởi $x + 2a$ ta được:

$$f(x+4a) = -\frac{1}{f(x+2a)} = -\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}} = f(x).$$

Vì $4a \neq 0$ nên đẳng thức này chứng tỏ rằng $f(x)$ là một hàm tuần hoàn.

Một ví dụ về hàm $f(x)$ với tính chất đã nêu là :

$$f(x) = -\operatorname{tg} x \text{ với } a = \frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 5. Tìm chu kỳ cơ sở của hàm số :

$$f(x) = 3 \sin x + \sin 2x.$$

Giải: Giả sử $f(x)$ là hàm tuần hoàn, và T là chu kỳ của hàm số. Tức là đối với mọi x ta luôn có :

$$3\sin(x+T) + \sin 2(x+T) = 3\sin x + \sin 2x.$$

Nói riêng ra, khi $x = 0$ ta có :

$3\sin T + \sin 2T = 0$, hay là : $\sin T(3 + 2\cos T) = 0$ Vì $3 + 2\cos T \neq 0$ nên $\sin T = 0$.

Như vậy, chu kỳ của hàm số đã cho chỉ có thể là số T nào đó thỏa mãn điều kiện $\sin T = 0$, tức là những số $T = k\pi$ (với $k = 1, 2, 3, \dots$).

Ta nhận thấy $T = \pi$ không phải là chu kỳ của hàm số

Thật vậy: với $x = \frac{\pi}{2}$ ta có:

$$f(x+\pi) = f\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -3.$$

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin \frac{\pi}{2} + \sin 2\frac{\pi}{2} = 3.$$

Vậy $f(x+\pi) \neq f(x)$.

Bây giờ ta chứng minh rằng $T = 2\pi$ là chu kỳ của hàm số đã cho.

Thật vậy, với mọi x ta luôn có:

$$3\sin(x + 2\pi) + \sin 2(x + 2\pi) = 3\sin x + \sin 2x$$

Tức là: $f(x + 2\pi) = f(x)$ với mọi x .

Từ đó suy ra: $T = 2\pi$ là chu kỳ cơ sở của hàm số đã cho.

Ví dụ 6. Cho $f_1(x)$ và $f_2(x)$ là những hàm tuần hoàn với chu kỳ tương ứng là T_1 và T_2 . Chứng minh rằng nếu T_1/T_2 là một số hữu tỉ thì: $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ và $g(x) = f_1(x).f_2(x)$ cũng là những hàm tuần hoàn.

Giải: Giả sử $T_1/T_2 = m/n$ với m, n là những số tự nhiên, khi đó: $nT_1 = mT_2$ và $f(x)$ (tương tự $g(x)$) là hàm tuần hoàn.

Thật vậy, gọi $T = nT_1 = mT_2$, ta có:

$$f(x + T) = f_1(x + T) + f_2(x + T) = f_1(x + nT_1) + f_2(x + mT_2) = f_1(x) + f_2(x) = f(x).$$

Ví dụ 7. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = x^3$ không phải là hàm tuần hoàn.

Giải: Miền xác định của hàm số là toàn trục số. Trong trường hợp này ta sẽ chứng minh điều kiện (3) không được thỏa mãn. Thật vậy, ta chứng minh rằng với mọi $T > 0$ luôn tồn tại ít nhất một giá trị x sao cho $f(x + T) \neq f(x)$.

Chẳng hạn ta có thể chọn $x = 0$. Khi đó:

$$f(x) = f(0) = 0; f(x + T) = f(T) = T^3 > 0, \text{ tức là } f(x + T) \neq f(x).$$

Vậy hàm số đã cho không tuần hoàn.

Thực ra, các ứng dụng của hàm số tuần hoàn đã được học sinh sử dụng rất nhiều trong việc giải các phương trình lượng giác (biểu diễn nghiệm của nó).

Ví dụ như đối với phương trình $\sin x = 1$ thì nói chung, các em học sinh đều viết được nghiệm của nó là $x = \pi/2 + 2k\pi$ (hàm số $\sin x$ tuần hoàn chu kỳ 2π).

Tuy nhiên, cũng có những trường hợp đơn giản nhưng học sinh rất lúng túng. Chẳng hạn như đối với bất phương trình $0 < \sin x < 1$ vẫn có những học sinh viết sai. Ta có thể viết nghiệm của bất phương trình trên như sau:

Do hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π nên chỉ cần xét trong khoảng $(0, 2\pi)$ là đủ (sau đó cộng thêm vào nghiệm nhận được $2k\pi$).

Trong khoảng $(0, 2\pi)$, bất phương trình kép $0 < \sin x < 1$ có nghiệm là $0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad (k \text{ nguyên})$$

b) Đồ thị của hàm số tuần hoàn.

Giả sử $y = f(x)$ là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ T . Ta nhận thấy rằng nếu điểm (x_0, y_0) thuộc đồ thị của hàm số này (tức $y_0 = f(x_0)$) thì các điểm $(x_0 + kT, y_0)$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) cũng thuộc đồ thị của hàm số (vì $f(x_0 + kT) = f(x_0) = y_0$). Từ đó suy ra rằng muốn dựng đồ thị của một hàm số tuần hoàn ta chỉ cần dựng một phần đồ thị của nó nằm trên một đoạn $a \leq x \leq a + T$ nào đó và khi đó muốn nhận được toàn bộ đồ thị của hàm số ta chỉ cần dịch chuyển phần đồ thị đó dọc theo trục hoành Ox một đoạn $\pm T, \pm 2T, \dots$ (xem hình 9).

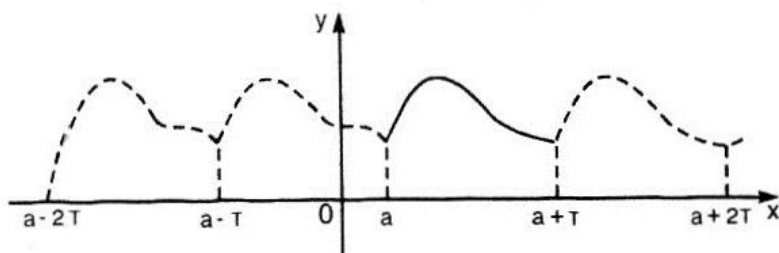
Ở phổ thông, chúng ta đã biết đồ thị của các hàm số $f(x) = \sin x, f(x) = \cos x, f(x) = \tan x, \dots$

Ở đây ta xét một ví dụ phức tạp hơn.

Ví dụ 8. Vẽ đồ thị hàm số $y = \sqrt{\tan x}$.

Giải: Hàm số đã cho xác định với mọi x thoả mãn $k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) cho nên nếu x thuộc miền xác định của hàm số, thì các điểm $x + \pi, x - \pi$ cũng thuộc miền xác định của hàm số, ta luôn có:

$\sqrt{\tan(x + \pi)} = \sqrt{\tan x}$. Như vậy hàm số tuần hoàn với chu kỳ π . Cho nên toàn bộ tính chất của hàm số ta chỉ cần xét trên $[0, \frac{\pi}{2})$ là đủ.



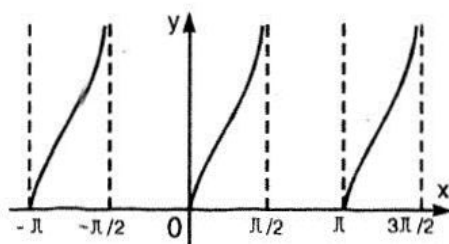
Hình 9

Ta có $y \geq 0$ với mọi x thuộc $[0, \frac{\pi}{2})$ ($y = 0$ khi $x = 0$).

Đồng thời $y' = \frac{1}{2 \cos^2 x \sqrt{\tan x}} > 0$ với mọi x thuộc $[0, \frac{\pi}{2})$

nên hàm số đồng biến trên khoảng đó. Từ đó dễ dàng suy ra đồ thị của hàm số như hình vẽ.

Nhận xét rằng nếu đồ thị của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$ với chu kỳ T có tâm đối xứng (trục đối xứng) thì nó sẽ có vô số tâm đối xứng (trục đối xứng). Các tâm đối xứng (trục đối xứng) cách nhau một khoảng bằng T .



Hình 10

Cuối cùng, chú ý rằng ngoài các hàm số tuần hoàn như ở trên, đôi khi ta còn gặp các hàm số tuần hoàn nhân tính:

$$f(ax) = f(x) \text{ với } a \neq 1; x > 0.$$

Chẳng hạn như hàm số:

$$f(x) = \cos[\lg x].$$

Ta có: $(f(10^{2\pi} \cdot x) = \cos[\lg(10^{2\pi} x)] = \cos(\lg x + 2\pi) = \cos[\lg x] = f(x)$ với $x > 0$.

Ở đây $a = 10^{2\pi}$.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng các hàm số sau là hàm tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở của các hàm số đó:

- a) $y = \sin x \cdot \sin 3x$; d) $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$;
 b) $y = \operatorname{tg} x + \sin 2x$; e) $y = \operatorname{tg} x + \cot g x$;
 c) $y = \sin^2 x$; g) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

2. Chứng minh rằng các hàm số sau đây không tuần hoàn:

- a) $y = x + \sin x$; b) $y = \cos(x^2)$.

3. Giả sử hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x$ triệt tiêu khi $x = x_1$ và $x = x_2$ với $x_1 - x_2 \neq k\pi$ (k nguyên). Chứng minh rằng khi đó $f(x) = 0$ với mọi x .

4. Giải các bất phương trình sau:

- a) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \leq 0$; b) $\frac{5}{8} \leq \sin^4 x + \cos^4 x \leq \frac{3}{4}$.

5. (Đề dự trữ A - năm 1971). Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x + \cos x$.

6*. Cho $f(x)$ là một hàm số xác định với mọi giá trị của x và thỏa mãn điều kiện

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)},$$

trong đó a là một số dương không phụ thuộc vào x .

- a) Chứng minh rằng $f(x)$ là một hàm tuần hoàn.
 b) Tìm một ví dụ về hàm $f(x)$ thỏa mãn tính chất đã nêu với $a = 1$ và $f(x)$ không phải là hằng số.

6. Hàm số liên tục.

a) *Định nghĩa hàm số liên tục.* Giả sử hàm số $y = f(x)$ được xác định tại điểm $x = x_0$ (như vậy $f(x_0)$ có nghĩa). Ta nói rằng hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nếu đẳng thức trên không xảy ra thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = x_0$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại mọi điểm thuộc đoạn $[a, b]$, thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$.

Giả sử $f(x)$ là một đa thức: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Ta đã biết rằng $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ tại mọi điểm $x = x_0$.

$$x \rightarrow x_0$$

Vậy một đa thức là một hàm số liên tục tại mọi điểm.

Dựa vào định nghĩa, ta có thể chứng minh được các hàm số lượng giác, hàm số mũ, hàm số lôgarit đều liên tục tại mọi điểm thuộc miền xác định của hàm số ấy.

Giả sử $p(x)$ và $q(x)$ là hai đa thức, ta cũng suy ra được phân thức $\frac{p(x)}{q(x)}$ là một hàm số liên tục tại mọi điểm x không phải là nghiệm của $q(x)$.

Ví dụ hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$ gián đoạn tại điểm $x = 3$.

Chú ý: Có những hàm số tuy được xác định tại điểm $x = x_0$ nhưng không liên tục tại điểm đó. Ví dụ hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x < 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0, \\ -1 & \text{nếu } x > 0. \end{cases}$$

Hàm số này xác định tại điểm $x = 0$ ($f(0) = 0$), nhưng hàm số không liên tục tại điểm đó bởi vì không tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

b) Đồ thị của hàm số liên tục.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a, b]$ và liên tục trên đoạn đó. Ta có nhận xét là trên đoạn $[a, b]$ đồ thị của hàm số là một đường liền, không bị đứt khúc.

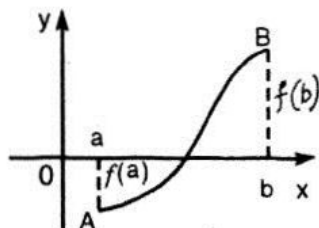
Nhận xét này, cho phép chúng ta nêu lên một tính chất quan trọng sau đây của các hàm số liên tục.

Định lý. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a, b]$. Nếu tại các điểm a và b , hàm số $f(x)$ có các giá trị trái dấu nhau, thì tồn tại một điểm c (với $a < c < b$) sao cho $f(c) = 0$.

Định lý này thường được sử dụng trong việc chứng minh sự tồn tại nghiệm của một phương trình trong một khoảng (a, b) nào đó.

Ta xét một số ví dụ áp dụng.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x - 1 = 0$ có một nghiệm duy



Hình 11

nhất. Gọi nghiệm đó là x_0 . Chứng minh rằng $0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Giải: Xét hàm số $f(x) = x^3 + x - 1$. Khi đó, $f(x)$ là một hàm số liên tục. Ta có: $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$.

Vậy tồn tại một giá trị x_0 ($0 < x_0 < 1$), sao cho $f(x_0) = 0$. Điều đó chứng tỏ phương trình đã cho có một nghiệm x_0 ($0 < x_0 < 1$). Ta chứng minh rằng nghiệm đó là duy nhất. Thật vậy, vì $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ với mọi x nên hàm số đã cho luôn luôn đồng biến.

Từ đó suy ra đồ thị của hàm số chỉ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất. Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất thuộc khoảng $(0, 1)$.

Do x_0 là nghiệm của phương trình nên ta có:

$$x_0^3 + x_0 - 1 = 0$$

hay là: $1 = x_0^2 + x_0$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương khác nhau x_0^3 và x_0 ta có: $1 = x_0^3 + x_0 > 2\sqrt{x_0^4} = 2x_0^2$.

Như vậy: $x_0^2 < \frac{1}{2}$.

Do $x_0 > 0$ nên suy ra: $0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Chú ý: Có thể giải như sau: 1) Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất. 2) $f(0) = -1 < 0$, $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2\sqrt{2}} - 1 > 0 \Rightarrow 0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Ví dụ 2. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), chứng minh rằng nếu $2a + 3b + 6c = 0$, thì phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(0, 1)$.

Giải: Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Trong bài toán này, việc xác định dấu của $f(0)$ và của $f(1)$ không phải là đơn giản. Bởi vậy, ta cần phải khôn khéo chọn các giá trị trung gian nằm trong khoảng $(0, 1)$ để xét sự có nghiệm của phương trình trong khoảng đó.

Cách 1. Ta có $f(0) = c$, $f(\frac{2}{3}) = \frac{4a}{9} + \frac{2b}{3} + c$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } f(0).f(\frac{2}{3}) &= c. [\frac{4a}{9} + \frac{2b}{3} + c] = \frac{c}{9} [4a + 6b + 9c] = \frac{c}{9} [2(2a + \\ &+ 3b + 6c) - 3c] = -\frac{c^2}{3} \quad (\text{do } 2a + 3b + 6c = 0). \end{aligned}$$

* Nếu $c \neq 0$. Lúc đó $f(0).f(\frac{2}{3}) = -\frac{c^2}{3} < 0$.

Từ đó suy ra phương trình đã cho có nghiệm nằm trong khoảng $(0, \frac{2}{3})$.

* Nếu $c = 0$. Lúc đó, phương trình đã cho có dạng: $ax^2 + bx = 0$ hay là $x(ax + b) = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm: $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$.

Để ý rằng với $c = 0$ thì từ giả thiết ta có:

$$2a + 3b = 0 \text{ hay là: } -\frac{b}{a} = \frac{2}{3}.$$

Vậy nghiệm: $x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ thuộc khoảng $(0, 1)$.

Tóm lại phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm nằm trong khoảng $(0, 1)$.

Cách 2. Ta có $f(0) = c, f(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$,

$$f(1) = a + b + c.$$

$$\text{Từ đó: } f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1) = 2a + 3b + 6c = 0.$$

Ta nhận thấy rằng không thể xảy ra trường hợp:

$f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1) = 0$ (vì một phương trình bậc hai không thể có quá hai nghiệm).

Đồng thời trong ba số $f(0); f(\frac{1}{2}); f(1)$ cũng không thể có hai số bằng không (vì nếu có như thế, thì theo giả thiết số còn lại cũng phải bằng không).

Vậy trong ba số $f(0); f(\frac{1}{2}); f(1)$ phải có ít nhất hai số khác không.

Do $f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1) = 0$, nên trong ba số $f(0); f(\frac{1}{2}); f(1)$ phải có hai số trái dấu.

* Nếu $f(0)$ và $f(\frac{1}{2})$ trái dấu thì phương trình đã cho có nghiệm trong khoảng $(0, \frac{1}{2})$.

* Nếu $f(\frac{1}{2})$ và $f(1)$ trái dấu thì phương trình đã cho có nghiệm trong khoảng $(\frac{1}{2}, 1)$.

* Nếu $f(0)$ và $f(1)$ trái dấu thì phương trình đã cho có nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Tóm lại, trong mọi trường hợp, phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm nằm trong khoảng $(0, 1)$.

BÀI TẬP

1. Hàm số $y = \begin{cases} 2x & \text{nếu } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ có liên tục hay không?

2. Cho hàm số $y = \begin{cases} 3x & \text{nếu } x < 0, \\ x+a & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$

Phải chọn a như thế nào để hàm số đã cho là liên tục?

3. Giả sử $y = f(x)$ là hàm số xác định trên đoạn $[a, b]$. Chứng minh rằng nếu hàm số có đạo hàm tại mọi điểm thuộc đoạn $[a, b]$, thì hàm số liên tục trên đoạn đó. Điều ngược lại có đúng không?

4. Giả sử $f(x)$ là hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[a, b]$.

a) Chứng minh rằng với mọi điểm x_1, x_2 thuộc đoạn $[a, b]$ đều tồn tại ít nhất một điểm $c \in [x_1, x_2]$ sao cho:

$$f(c) = \frac{1}{2} (f(x_1) + f(x_2)).$$

b) Chứng minh rằng với mọi điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc đoạn $[a, b]$ đều tồn tại ít nhất một điểm c thuộc đoạn $[a, b]$ sao cho:

$$f(c) = \frac{1}{n} (f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)).$$

5. Cho 4 số a, b, c, d với $a < b < c < d$. Chứng minh rằng với mọi p và q phương trình:

$$p(x-a)(x-c) + q(x-b)(x-d) = 0 \text{ luôn luôn có nghiệm.}$$

6. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có 5 nghiệm phân biệt.

7. Cho a, b, c là những số dương và $a < c; b < c$. Chứng minh rằng phương trình: $x^a + x^b = c^x$ có một và chỉ một nghiệm.

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP

Chương I

§1.1. Định nghĩa hàm số

1. $f(0) + f(\pi) + (\pi - \alpha) = -\cos \alpha$.

2. a) $f(0) + f(1) + f(-1) = 4$.

b) $f(5)$ không tồn tại.

3. Chú ý rằng $x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2 =$
 $= |(x + \frac{1}{x})^2 - 2|^2 - 2$.

4. $f(a + \frac{1}{a}) + g(a - \frac{1}{a}) = |a - \frac{1}{a}| + (a + \frac{1}{a})$.

2. Khoảng xác định của hàm số.

1. a) $-1 < x < 1$ và $2 < x < 5$; b) $\frac{1}{2} < x \leq \frac{53}{34}$.

2. a) $x < 0$; b) $-1 < x < 1$; c) Hàm số xác định với mọi $x \neq k \frac{\pi}{4}$.

3. Các hàm số ở a) và b) không xác định với một giá trị nào của x .

4. Để phương trình có nghĩa phải có

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0 \text{ và } -4x^2 + 8x - 3 \geq 0$$

$$x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq 3.$$

hay là $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Từ đó suy ra phương trình vô nghiệm.

5. $x < -1 - \sqrt{5}$ và $-1 - \sqrt{5} < x < -3$ và $x \geq 2$.

3. Miền giá trị của hàm số.

1. a) $1 \leq y \leq 2$; $y \geq 2$; c) $y \leq -2$ hoặc $y \geq 2$; d) $2^{-\sqrt{2}} \leq y \leq 2^{\sqrt{2}}$.

2. a) $y \geq \frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$.

3. a) Mọi $y \neq 4$; b) $y \leq -2$ hoặc $y > 0$.

4. a) $y \geq 4$; b) $y \geq 2\sqrt{2}$

4. Hàm số phụ thuộc tham số.

1. $m = 2$; $m = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$; $m = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$.

2. a) $m = -\frac{1}{2}$; b) $m = 6$; $m = 1$; $m = 2$; c) $m = 1$.

3. a) $m < 0$; b) $m = 0$.

5. Hàm hợp.

1. $f[\varphi(x)] = f[\cos x] = (\cos x)^2$;

$\varphi[f(x)] = \varphi[x^2] = \cos^2$.

2. $f(\frac{1}{2}) = \frac{1-x^2}{1+x^2} (x \neq 0)$.

3. $f(\operatorname{tg} x) = \frac{\sin^2 x}{|\cos x|}$.

4. a) Khi $a \geq 0$ thì $f(t) = t^2 + 2a$ xác định với mọi t . Khi $a < 0$ thì $f(t) = t^2 + 2a$ xác định với $t < -2\sqrt{-a}$ và $t > 2\sqrt{-a}$.

b) $f(t) = \sqrt{1+(t^2-1)^2}$ với $t \geq 0$;

c) $f(t) = \frac{2}{t} - \sqrt{1 - \frac{2}{t^2}}$, $t \neq 0$;

d) $f(t) = \frac{-t^2 + 2t}{(t-1)^2}$.

6. a) $f(x) = \frac{2-x^2}{3x}$ với $x \neq 0$; b) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ với $x \neq 0$ và $x \neq 1$.

7. $f(\frac{x-1}{x}) = \frac{1}{1-x}$.

§2.1. Hàm số chẵn và hàm số lẻ.

1. a) Hàm lẻ; b) Không phải hàm chẵn, không phải hàm lẻ; c) Hàm lẻ; d) Hàm chẵn; e) Hàm chẵn; g) Hàm lẻ.

2. $f(-x) = \varphi(\psi(-x)) = \varphi(\psi(x)) = f(x)$ suy ra $f(x)$ là hàm chẵn.

4. a) Theo giả thiết $f(-x) = f(x)$. Đạo hàm hai vế ta được $-f'(-x) = f'(x)$ suy ra $f'(x)$ là hàm lẻ. b) Theo giả thiết $-f(-x) = f(x)$. Đạo hàm hai vế ta được $f'(-x) = f'(x)$ suy ra $f'(x)$ là hàm chẵn.

5. Gọi vế trái là $f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số chẵn. Vậy muốn phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện cần là nghiệm đó bằng 0. Thay $x = 0$, suy ra các giá trị b. Sau đó, thử lại với b tìm được để kiểm chứng điều kiện đủ.

10. a) $\frac{db}{ac} > 0$; Từ điều kiện $y(-x) = -y(x)$ có 2 nghiệm $x_1 \neq x_2$ và từ điều

kiện $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ suy ra $a = 0$, $d = 0$, khi đó $\frac{b}{cx}$ có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

11. $a = b = 0$.

2. Hàm số đồng biến và nghịch biến.

2. $\sqrt{a^2 + b^2} \leq 1$.

3. a) Chứng minh y' không thể luôn luôn dương.

b) $-2 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

4. $m \leq -\frac{1}{4}$.

5. $m \leq 0$.

6. a) $m > 0$, b) $m > 1$.

7. Gọi vế trái của phương trình là $f(x)$. Khảo sát hàm số $f(x)$ ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ chỉ có một nghiệm duy nhất, gọi nghiệm đó là x_0 . Ta thấy $f(1) = -2 < 0$; $f(2) = 2^5 > 0$ nên $1 < x_0 < 2$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương khác nhau ta có: $x_0^5 = x_0 + 2 > 2\sqrt{2x_0}$. Do đó: $x_0^{10} > 8x_0$, từ đó suy ra $x_0 > \sqrt[10]{8}$.

8. a) Nghiệm duy nhất $x = 2$. b) Nghiệm duy nhất $x = 1/2$.

10. $m < 2$.

11. a) Xét hàm số $y = x - \sin x$. Suy ra $y' \geq 0$.

b) Xét hàm số $y = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ (hàm chẵn)

Ta có $y' > 0$ khi $x > 0$. Suy ra điều phải chứng minh.

12. Xét hàm số $f(x) = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x-a}$ và chứng tỏ $f(x) < 0$.

13. Xét hàm số $y = x^k$. Chú ý rằng nếu k là số lẻ thì hàm số luôn luôn đồng biến. Còn nếu k là số chẵn thì hàm số đồng biến khi $x > 0$ và nghịch biến khi $x < 0$.

14. a) Xét hàm số $f(\alpha) = 1 + \alpha\beta \cdot (1 + \alpha)^\beta$ và chứng tỏ $f(\alpha) > 0$.

b) Tìm cách áp dụng câu a).

3. Hàm số tuần hoàn.

3. Ta chứng minh $a = b = 0$. Thật vậy, giả sử trái lại $a^2 + b^2 > 0$.
Viết hàm số đã cho dưới dạng:

$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$. Khi đó theo giả thiết suy ra:

$$\begin{cases} \sin(x_1 + \varphi) = 0 \\ \sin(x_2 + \varphi) = 0 \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} x_1 + \varphi = k\pi \\ x_2 + \varphi = l\pi. \end{cases}$$

Từ đó $x_1 - x_2 = (k - l)\pi = n\pi$. Điều này trái với giả thiết.

4. a) $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$, từ đó:

$$-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

b) $-\frac{1}{2} \leq \cos 4x \leq 0$. Từ đó

$$\begin{cases} \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

6. a) Từ giả thiết suy ra: $1/2 \leq f(x) \leq 1$ với mọi x . Hãy suy ra $f(x + 2a) = f(x)$ với mọi x .

b) Có thể lấy ví dụ:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{khi } 2n \leq x < 2n+1 \\ 1 & \text{khi } 2n+1 \leq x < 2n+2 \end{cases}$$

với n nguyên.

4. Hàm số liên tục.

1. Giảm đoạn tại điểm $x = 1$.

2. $a = 1$.

3. Điều ngược lại không đúng; ví dụ như hàm số $y = |x|$ liên tục tại mọi điểm nhưng không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

5. Gọi vế trái của phương trình là $f(x)$; hãy xét $f(a).f(c)$.

$$6. f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = (x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) - 1.$$

Nhận thấy $f(x) > 0$ với mọi $x \geq 3$,

$$f(x) < 0 \text{ với mọi } x \leq -2,$$

nên ta chỉ cần xét trong khoảng $(-2, 3)$.

$$\text{Ta có: } f(-2).f(-1.5) < 0 \quad f(-1.5).f(-1) < 0,$$

$$f(0).f(0.5) < 0, \quad f(0.5).f(1) < 0 \quad f(2).f(3) < 0.$$

Suy ra phương trình có đúng 5 nghiệm.

7. Chia cả hai vế cho c^x và để ý rằng các hàm số.

$$y = \left(\frac{a}{c}\right)^x; y = \left(\frac{b}{c}\right)^x \text{ nghịch biến.}$$

Chương II

CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH HÌNH

§1. Các điểm đặc biệt đối với họ đồ thị cho trước.

Giả sử ta có họ tham số $y = f(m, x)$, trong đó $m \in A$ là tham số thuộc tập hợp A nào đó (A có nhiều hơn 1 giá trị). Ứng với mỗi giá trị của tham số $m \in A$ ta có một hàm số cụ thể và tương ứng với nó một đồ thị cụ thể. Khi m thay đổi, $m \in A$ ta được một họ các hàm số và do đó có tương ứng một họ đồ thị.

Có thể phân các điểm trên mặt phẳng tọa độ thành ba loại:

1) Điểm mà mọi đồ thị của họ đồ thị đã cho đi qua (điểm cố định của họ đồ thị).

2) Điểm mà không có đồ thị nào của họ đồ thị đã cho đi qua.

3) Điểm mà chỉ có một số đồ thị của họ đồ thị đã cho đi qua.

Chúng ta sẽ lần lượt xét từng loại điểm ấy.

1. Điểm cố định của họ đồ thị.

Điểm $M(x_0, y_0)$ được gọi là điểm cố định của họ đồ thị đã cho nếu mọi đồ thị của họ đó ứng với mọi giá trị $m \in A$, đều đi qua M .

Chú ý: Nếu A là $\forall m$, thì kể cả các giá trị m để hàm số suy biến (*). Nếu trái lại thì A không chứa các giá trị ấy.

Có nhiều phương pháp khác nhau để tìm điểm cố định của một họ đồ thị cho trước, song có hai phương pháp cơ bản sau đây:

* Phương pháp thứ nhất dựa vào tính chất của đa thức là phương trình bậc n có không quá n nghiệm, do đó phương trình bậc n : $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ có nhiều hơn n nghiệm khi và chỉ khi đa thức vế trái của phương trình đồng nhất bằng không, tức là khi và chỉ khi $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$.

* Phương pháp thứ hai dựa vào tính chất của đạo hàm bậc nhất của tham số: đạo hàm bậc nhất của hàm số đồng nhất bằng 0 khi và chỉ khi hàm số đó là hằng số.

a) Phương pháp thứ nhất.

* Gọi $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định cần tìm của họ đồ thị $y = f(m, x)$, $m \in A$. Khi đó, theo định nghĩa, nó nằm trên mọi đồ thị của họ đã cho tức là $y_0 = f(m, x_0)$ ($\forall m \in A$) hay $y_0 - f(m, x_0) = 0$ ($\forall m \in A$): (1).

* Sau khi nhóm các thành phần ứng với cùng bậc n của m , phương trình (1) sẽ có dạng: $a_0(x_0, y_0)m^k + a_1(x_0, y_0)m^{k-1} + \dots + a_k(x_0, y_0) = 0$ ($\forall m \in A$). (2)

* Theo tính chất của đa thức, từ (2) suy ra:

$$\begin{cases} a_0(x_0, y_0) = 0 \\ a_1(x_0, y_0) = 0 \\ \dots \\ a_k(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Hệ (3) xác định tọa độ điểm M . Hệ (3) có bao nhiêu nghiệm thì họ đồ thị đã cho có bấy nhiêu điểm cố định. Nếu sau khi dùng các phép thế hệ (3) đưa về phương trình bậc S đối với x_0

(*) Chúng ta hiểu dạng của hàm số suy biến với giá trị nào đó của tham số, nếu với giá trị đó của tham số, biểu thức của hàm số khác với dạng ban đầu. Chẳng hạn, hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 2}{x - m}$ với $m = 1$ suy biến thành hàm số $y = x + 2$ ($x \neq 1$). Dạng suy biến của hàm số (do đó của đồ thị) còn gọi là dạng không bình thường của nó.

(hoặc y_0) thì họ đồ thị đã cho có không quá S điểm cố định.

b) Phương pháp thứ hai.

* Gọi $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định cần tìm khi đó $y_0 = f(m, x_0)$ ($\forall m \in A$).

* Xem vế phải của đẳng thức trên là một tham số đối với m : $F(m) = f(m, x_0)$ thì $F(m) = y_0$ ($\forall m \in A$), tức là $F(m)$ là hằng số đối với m .

Từ đây suy ra: $F'(m) = 0$ ($\forall m \in A$). (4)

* Sau khi nhóm các thành phần theo bậc của m , phương trình (4) có dạng.

$$A_0(x_0)m^n + A_1(x_0)m^{n-1} + \dots + A_n(x_0) = 0 \quad (\forall m \in A).$$

Từ đây chúng ta được hệ phương trình xác định hoành độ điểm M :

$$\begin{cases} A_0(x_0) = 0 \\ A_1(x_0) = 0 \\ \dots \\ A_n(x_0) = 0. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$.

Tìm trên mặt phẳng tọa độ các điểm, mà mọi đồ thị của họ đồ thị này đi qua dù m lấy bất kỳ giá trị nào.

Giải: Cách 1. Gọi (x_0, y_0) là điểm cố định cần tìm, khi đó

$y_0 = x_0^3 - (m+1)x_0^2 - (2m^2 - 3m + 2)x_0 + 2m(2m-1)$, với mọi m hay $(4 - 2x_0)m^2 + (3x_0 - x_0^2 - 2)m + (x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - y_0) = 0$ ($\forall m$).

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} 4 - 2x_0 = 0 \\ 3x_0 - x_0^2 - 2 = 0 \\ x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 - y_0 = 0. \end{cases}$$

Hệ này có một nghiệm duy nhất $x_0 = 2, y_0 = 0$. Vậy đồ thị của hàm số luôn đi qua điểm cố định $(2, 0)$.

Cách 2. Gọi (x_0, y_0) là điểm cố định cần tìm, khi đó

$$x_0^3 - (m+1)x_0^2 - (2m^2 - 3m + 2)x_0 + 2m(2m-1) = y_0 \quad (\forall m)$$

$$\text{Đặt } F(m) = x_0^3 - (m+1)x_0^2 - (2m^2 - 3m + 2)x_0 + 2m(2m-1) =$$

$$= (4 - 2x_0)m^2 + (3x_0 - x_0^2 - 2)m + (x_0^3 - x_0^2 - 2x_0)$$

Thế thì $F(m) = y_0 \quad (\forall m)$, do đó $F'(m) = 0 \quad (\forall m)$, hay

$$2(4 - 2x_0)m + (3x_0 - x_0^2 - 2) = 0 \quad (\forall m)$$

Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} 4 - 2x_0 = 0 \\ 3x_0 - x_0^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất $x_0 = 2$. Thay $x_0 = 2$ vào biểu thức của hàm số ta được $y_0 = 0$. Vậy họ đường cong có một điểm cố định duy nhất là $(2, 0)$.

Ví dụ 2. Cho họ đường cong xác định bởi họ hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 2}{x - m}$ với $m \neq 1$. Tìm tất cả các điểm cố định của họ đường cong đó.

Giải: Lưu ý rằng dạng hàm số đã cho suy biến khi $m = \pm 1$. Với $m = 1$ dạng hàm số suy biến thành $y = x + 2, x \neq 1$.

Với $m = -1$ dạng hàm số suy biến thành $y = x - 2, x \neq -1$.

Gọi (x_0, y_0) là điểm cố định cần tìm. Khi đó

$$\begin{cases} y_0 = \frac{x_0^2 + mx_0 - 2}{x_0 - m}, \text{ với mọi } m \neq 1 \\ x_0 \neq m, \end{cases}$$

$$\text{hay } \begin{cases} (x_0 + y_0)m + (x_0^2 - x_0y_0 - 2) = 0 \quad \forall m \neq 1 & (i) \\ x_0 \neq m & (ii) \end{cases}$$

(i) tương đương với

$$\begin{cases} (x_0 + y_0) = 0 \\ x_0^2 - x_0y_0 - 2 = 0 \end{cases}$$

Hệ này cho hai nghiệm là tọa độ của 2 điểm A(1, -1) và B(-1, 1). Từ (ii) suy ra:

Điểm A(1, -1) là điểm cố định của họ đường cong ứng với $m \neq 1$.

Điểm B(-1, 1) không là điểm cố định của họ đường cong vì ứng với $m = -1$, $y = x - 2$ không đi qua B.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^3 + (m + |m|)x^2 - 4x - 4(m + |m|)$.

Chứng minh rằng, với mọi m , đồ thị của họ hàm số đã cho luôn đi qua 2 điểm cố định.

Giải: Cách 1. Đặt $a = m + |m| \geq 0$ ($\forall m$).

Gọi (x_0, y_0) là tọa độ của điểm cố định cần tìm. Khi đó

$$y_0 = x_0^3 + ax_0^2 - 4x_0 - 4a \quad (\forall a \geq 0)$$

$$\text{hay} \quad (x_0^2 - 4)a + (x_0^3 - 4x_0 - y_0) = 0 \quad (\forall a \geq 0)$$

$$\text{Điều này tương đương với} \quad \begin{cases} x_0^2 - 4 = 0 \\ x_0^3 - 4x_0 - y_0 = 0. \end{cases}$$

Hệ này cho 2 nghiệm $(x_0 = 2, y_0 = 0)$ và $(x_0 = -2, y_0 = 0)$.

Vậy với mọi m , đồ thị luôn đi qua 2 điểm cố định (2, 0) và (-2, 0).

Cách 2. Cũng đặt $a = m + |m| \geq 0$ ($\forall a$). Hàm số đã cho có thể viết dưới dạng $y = x^3 + ax^2 - 4x - 4a = (x^2 - 4)(x + a)$.

Rõ ràng, với mọi a (nói riêng với $a \geq 0$), $y = 0$, khi $x = \pm 2$.

Vậy hai điểm (2, 0) và (-2, 0) là các điểm cố định của họ đồ thị đã cho.

Cách 3. Để ý rằng:

$$m + |m| = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m \leq 0 \\ 2m & \text{nếu } m > 0. \end{cases}$$

Nếu $m \leq 0$ hàm số có dạng $y = x^3 - 4x$. (i)

Nếu $m > 0$ hàm số có dạng $y = x^3 + 2mx^2 - 4x - 8m = (x^2 - 4)(x + 2m)$.

Họ này có hai điểm cố định (2, 0) và (-2, 0). Hai điểm này cũng thỏa mãn phương trình (i). Vậy họ đồ thị đã cho có hai điểm cố định (2, 0), (-2, 0).

Ví dụ 4. Cho hàm số

$$y = \frac{mx^2 + (m+1)x + m^2}{x+1}$$

Chứng minh rằng đồ thị của hàm số không có điểm cố định. Tuy nhiên, chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị luôn đi qua một điểm cố định.

Giải: Giả sử rằng với mọi m đồ thị của hàm số luôn đi qua điểm cố định (x_0, y_0) , khi đó:

$$y_0 = \frac{mx_0^2 + (m+1)x_0 + m^2}{x_0 + 1} \quad (i)$$

(Đề ý rằng dạng hàm số suy biến khi $m = \pm 1$).

Từ (i) suy ra $m^2 + (x_0^2 + x_0)m + (x_0 - y_0x_0 - y_0) = 0, \forall m$.

Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} 1 = 0 \\ x_0^2 + x_0 = 0 \\ x_0 - y_0x_0 - y_0 = 0. \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm. Vậy đồ thị của hàm số đã cho không có điểm cố định. Hàm số đã cho có thể viết dưới dạng.

$$y = mx + 1 + \frac{m^2 - 1}{x + 1},$$

do đó tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = mx + 1$, khi $m \neq \pm 1$ vì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{mx^2 + (m+1)x + m^2}{x+1} - (mx+1) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m^2 - 1}{x+1} = 0$$

Rõ ràng họ tiệm cận xiên này luôn đi qua điểm cố định $(0, 1)$.

Ví dụ 5. Cho hàm số

$$y = \frac{mx - p}{px + m + 1}.$$

Hãy xác định p , biết rằng họ đường cong này luôn đi qua một điểm cố định duy nhất.

Giải: Giả sử (x_0, y_0) là điểm cố định duy nhất của họ đường cong đã cho, khi đó

$$y = \frac{mx_0 - p}{px_0 + m + 1} \text{ với mọi } m.$$

$$\text{hay } (x_0 - y_0)m + (px_0y_0 + y_0 + p) = 0 \quad (\forall m).$$

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} y_0 - x_0 = 0 & (i) \\ px_0y_0 + y_0 + p = 0. & (ii) \end{cases}$$

Từ (i) suy ra $y_0 = x_0$. Thế vào (ii) ta được

$$px_0^2 + x_0 + p = 0. \quad (iii)$$

Theo điều kiện đầu bài, phương trình (iii) phải có một nghiệm duy nhất.

* Nếu $p = 0$, khi đó $x_0 = 0$ là nghiệm duy nhất của (iii). Vậy với $p = 0$ đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định $(0, 0)$.

* Nếu $p \neq 0$, để (iii) có một nghiệm duy nhất, ta phải có

$$\Delta = 1 - 4p^2 = 0 \text{ hay } p = \pm \frac{1}{2}.$$

Vậy $p = 0$ và $p = \pm \frac{1}{2}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 6. Xác định các giá trị α, β sao cho đồ thị của hàm số

$$y = \frac{mx + \alpha}{\beta x + m - 1}, m \neq -1, m \neq 2.$$

nhận 2 điểm $A(-1, -1)$ và $B(2, 2)$ làm điểm cố định.

Giải: *Cách 1.* Vì $A(-1, -1)$ và $B(2, 2)$ là các điểm cố định, nên tọa độ của chúng thỏa mãn phương trình đường cong với mọi $m \neq -1$ và $m \neq 2$, ta có:

$$\begin{cases} -1 = \frac{-m + \alpha}{-\beta + m - 1} \\ 2 = \frac{2m + \alpha}{2\beta + m - 1} \end{cases} \quad (\forall m \neq -1, m \neq 2)$$

hay
$$\begin{cases} \alpha - \beta = 1, & \beta \neq m - 1 \\ \alpha - 4\beta = -2, & \beta \neq -\frac{m-1}{2} \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $\alpha = 2, \beta = 1$. Vì $1 \neq m - 1 \Rightarrow m \neq 2$ và $-1 \neq -\frac{m-1}{2} \Rightarrow m \neq -1$ nên với $\alpha = 2, \beta = 1$, họ đồ thị đã cho nhận A, B làm các điểm cố định.

Cách 2. Gọi $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định của họ đồ thị. Khi đó

$$y_0 = \frac{mx_0 + \alpha}{\beta x_0 + m - 1} \quad (\forall m \neq -1, m \neq 2) \text{ hay } (y_0 - x_0)m +$$

$(x_0 y_0 \beta - y_0 + \alpha) = 0 \quad (\forall m, m \neq -1, m \neq -2)$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} y_0 - x_0 = 0 \\ x_0 y_0 \beta - y_0 - \alpha = 0. \end{cases} \quad (i)$$

Vì $M \equiv A$ nên thay $x_0 = -1, y_0 = -1$ vào (i) ta được

$$\alpha - \beta = 1;$$

$M \equiv B$ nên thay $x_0 = 2, y_0 = 2$ vào (i) ta được

$$\alpha - 4\beta = -2;$$

Ta được hệ
$$\begin{cases} \alpha - \beta = 1 \\ \alpha - 4\beta = -2. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $\alpha = 2, \beta = 1$.

Với $\alpha = 2, \beta = 1$, đồ thị suy biến thành $y = 2$ khi $m = 2$ và $y = -1$ khi $m = -1$. Nhưng theo đầu bài, 2 giá trị này bị loại trừ.

Ví dụ 7. Cho hàm số

$$y = x^3 + (2m - 5)x^2 - 3mx - 5m.$$

a) Với giá trị nào của m , đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn -2 .

b) Với giá trị nào của m đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành.

Giải: Trước hết, ta có thể dễ dàng tìm được điểm $(5/2, 0)$ là điểm cố định của hàm số trên trục hoành. Do đó hàm số đã cho có thể viết dưới dạng

$$y = (2x - 5)(x^2 + mx + m).$$

a) Rõ ràng với mọi m , đồ thị đã cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = \frac{5}{2} > -2$, vậy đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lớn hơn -2 khi và chỉ khi phương trình $x^3 + mx + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{5}{2}$ và đều lớn hơn -2 . Đặt

$f(x) = x^2 + mx + m$, ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = m^2 - 4m > 0 \\ 1. f(-2) > 0 \\ -\frac{m}{2} > -2 \\ f(\frac{5}{2}) \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m < 0, \text{ hoặc } m > 4 \\ m < 4 \\ m < 4 \\ m \neq -\frac{25}{14} \end{array} \right.$$

hay $m < 0, m \neq -\frac{25}{14}$.

b) Để đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với trục hoành phải có hoặc phương trình $x^2 + mx + m = 0$ có nghiệm kép, hoặc phương trình đó có nghiệm trùng với $x = \frac{5}{2}$, tức là:

$$\text{hoặc } \Delta' = m^2 - 4m = 0$$

$$\text{hay } m = 0, m = 4.$$

$$\text{hoặc} \quad \begin{cases} \Delta = m^2 - 4 > 0 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0, m > 4 \\ m = -\frac{25}{14} \end{cases}$$

$$\text{hay } m = -\frac{25}{14}.$$

Vậy với $m = -\frac{25}{14}$, $m = 0$, $m = 4$, đồ thị tiếp xúc với trục hoành.

Chú ý: Ta cũng có thể tìm trực tiếp các biểu thức của nghiệm của phương trình $x^2 + mx + m = 0$ là:

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2} \text{ khi đó câu a) sẽ dẫn tới giải hệ bất phương trình}$$

$$\begin{cases} m^2 - 4m > 0 \\ \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2} > -2 \\ \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4m}}{2} \neq \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Câu b) sẽ dẫn tới hoặc $\Delta = m^2 - 4m = 0$

$$\text{hoặc} \quad \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m > 0 \\ \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{hoặc} \quad \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m > 0 \\ \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4m}}{2} = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Cách 2. Tính $y'(x) = 6x^2 + 2(2m - 5)x - 3m$.

a) Để đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ > -2 cần thỏa mãn các điều kiện sau đây:

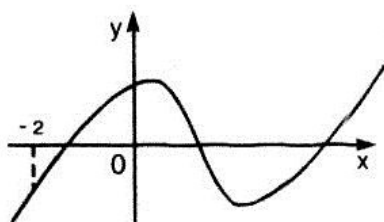
* Cực đại và cực tiểu của hàm số có hoành độ > -2 .

* Giá trị cực đại, cực tiểu trái dấu.

* Giá trị hàm số tại $x = -2$ là một số âm.

Kết hợp lại m cần thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} \Delta' = (m-5)^2 + 18 > 0 \\ 6y'(-2) = 6|4-m| > 0 \\ \frac{5-2m}{6} > -2 \\ y_{\max} y_{\min} < 0 \\ y(-2) = 9m - 36 < 0. \end{cases}$$



Hình 12

b) Đồ thị chỉ có thể tiếp xúc với trục hoành tại điểm cực đại hoặc cực tiểu, tức là m phải thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \Delta' = (2m-5)^2 + 18m > 0 \\ y_{\max} y_{\min} = 0 \end{cases}$$

2. Điểm mà không có đồ thị nào của họ đồ thị đã cho đi qua. Gọi điểm $A(x_0, y_0)$ là điểm mà không có đồ thị nào của họ đường cong đã cho đi qua, khi đó $y_0 \neq f(m, x_0)$ ($\forall m \in A$) hay phương trình $y_0 - f(m, x_0) = 0$ (ẩn số m) vô nghiệm. Từ điều kiện vô nghiệm của phương trình đó suy ra quan hệ tung độ y_0 và hoành độ x_0 của điểm A .

Do tính chất đơn trị của hàm số, chúng ta suy ra nếu một họ đồ thị có điểm cố định $B(x_1, y_1)$ thì các điểm $(x = x_1, y \neq y_1)$ sẽ là những điểm mà không có đồ thị nào của họ đồ thị đã cho đi qua.

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = mx^3 + (1-m)x$. Tìm trên mặt phẳng tọa độ tất cả những điểm mà đồ thị của hàm số không thể đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào.

Giải: Giả sử điểm (x_0, y_0) là điểm mà đồ thị của hàm số không bao giờ đi qua. Khi đó phương trình:

$$y_0 = mx_0^3 + (1 - m)x_0 \text{ vô nghiệm,}$$

hay là phương trình

$$(x_0^3 - x_0)m + (x_0 - y_0) = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Điều kiện cần và đủ để phương trình này vô nghiệm là:

$$\begin{cases} x_0(x_0^2 - 1) = 0, \\ x_0 - y_0 \neq 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 \neq -2 \end{cases}, \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 \neq 0 \end{cases}, \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 \neq 1 \end{cases}.$$

Như vậy, tất cả các điểm phải tìm là ba đường thẳng:

1) $x = -1$ bỏ đi điểm $A(-1, -1)$,

2) $x = 0$ bỏ đi điểm $B(0, 0)$,

3) $x = 1$ bỏ đi điểm $C(1, 1)$.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 8}{x - m}$. Tìm trên mặt phẳng

tọa độ tất cả những điểm mà đồ thị của hàm số không thể đi qua, khi m thay đổi.

Giải : Giả sử điểm (x_0, y_0) là điểm mà đồ thị của hàm số không bao giờ đi qua. Khi đó phương trình:

$$y_0 = \frac{x_0^2 + mx_0 - 8}{x_0 - m} \text{ (ẩn số } m \text{) vô nghiệm.}$$

Biến đổi phương trình trên về dạng:

$$(x_0 + y_0)m + (x_0^2 - x_0y_0 - 8) = 0, m \neq x_0.$$

Điều kiện cần và đủ để phương trình này vô nghiệm là:

$$\begin{cases} x_0 + y_0 = 0 \\ x_0^2 - x_0y_0 - 8 \neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } m = x_0.$$

Tức là $y_0 = -x_0$, và $x_0 \neq \pm 2$. Mặt khác ta thấy rằng các điểm $A(2, -2)$, $B(-2, 2)$ là các điểm cố định của họ đường cong với $m \neq \pm 2$. Như vậy tất cả các điểm cần tìm là các đường

thẳng $y = -x$, $x = -2$, $x = 2$ bỏ đi hai điểm $A(2, -2)$ và $B(2, -2)$; và $(2, 6)$ khi $m = 2$; $(-2, -6)$ khi $m = -2$.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = \frac{(3m+1)x - (m^2 - m)}{x + m}$, $m \neq 0$.

a) Chứng tỏ rằng đồ thị của hàm số không có điểm cố định.

b) Tìm tất cả các điểm trên mặt phẳng tọa độ mà đồ thị của hàm số không thể đi qua, khi m thay đổi.

Giải: a) Giả sử (x_0, y_0) là điểm cố định của đồ thị.

Khi đó $y_0 = \frac{(3m+1)x_0 - (m^2 - m)}{x_0 + m}$, với mọi $m \neq 0$.

hay là: $y_0(x_0 + m) = (3m+1)x_0 - (m^2 - m)$ với mọi $m \neq 0$.

hay là: $m^2 + (y_0 - 3x_0 - 1)m + x_0y_0 - x_0 = 0$ với mọi $m \neq 0$.

Hiển nhiên rằng điều này không thể xảy ra, vậy đồ thị của hàm số không có điểm cố định.

b) Giả sử (x_0, y_0) là điểm mà đồ thị hàm số không bao giờ đi qua. Khi đó phương trình:

$y_0 = \frac{(3m+1)x_0 - (m^2 - m)}{x_0 + m}$ vô nghiệm, hay là phương trình:

$m^2 + (y_0 - 3x_0 - 1)m + x_0(y_0 - 1) = 0$ vô nghiệm. Điều này tương đương với:

$$\Delta = (y_0 - 1 - 3x_0)^2 - 4x_0(y_0 - 1) < 0,$$

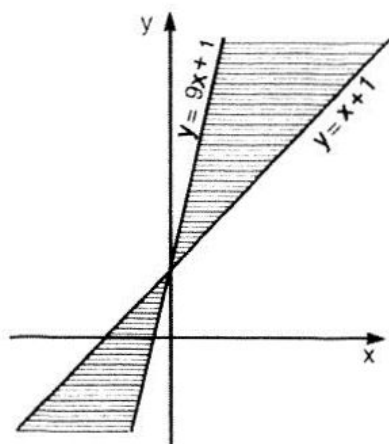
$$\text{hay là } (y_0 - 1)^2 - 10x_0(y_0 - 1) + 9x_0^2 < 0,$$

$$\text{hay là } (y_0 - 1)^2 - 9x_0(y_0 - 1) - x_0(y_0 - 1) + 9x_0^2 < 0,$$

$$\text{hay là } (y_0 - 1)(y_0 - 1 - 9x_0) - x_0(y_0 - 1 - 9x_0) < 0,$$

$$\text{hay là } (y_0 - 1 - 9x_0)(y_0 - 1 - x_0) < 0.$$

Như vậy: hoặc $\begin{cases} y_0 < x_0 + 1, \\ y_0 > 9x_0 + 1. \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y_0 > x_0 + 1, \\ y_0 < 9x_0 + 1. \end{cases}$



Hình 13

Có thể thấy rằng các điểm (x_0, y_0) thỏa mãn điều kiện trên là các điểm nằm bên trong hai góc nhọn tạo bởi các đường thẳng $y = x + 1$ và $y = 9x + 2$ (hình 13).

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - m^2}{x - m}$.

Tìm trên mặt phẳng tọa độ tất cả những điểm mà tiệm cận xiên của đồ thị hàm số không thể đi qua, khi m thay đổi.

Giải: Đồ thị của hàm số đã cho có tiệm cận xiên là:

$$y = (m+1)x + m^2 + m, \quad m \neq 0, m \neq -1.$$

Giả sử (x_0, y_0) là điểm mà tiệm cận xiên không bao giờ đi qua, khi đó phương trình:

$$y_0 = (m+1)x_0 + m^2 + m \text{ vô nghiệm.}$$

hay là phương trình: $m^2 + (x_0 + 1)m + (x_0 - y_0) = 0$ vô nghiệm.

Điều này tương đương với: $\Delta = (x_0 + 1)^2 - 4(x_0 - y_0) < 0$,
hay là: $4y_0 + x_0^2 + 1 < 0$, hay là:

$$y_0 < -\frac{1}{4}x_0^2 + \frac{1}{2}x_0 - \frac{1}{4}.$$

Để thấy các điểm (x_0, y_0) thỏa mãn điều kiện trên là các điểm nằm ở phía trong parabol:

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

(Trong phần sau, chúng ta sẽ thấy rằng chỉ khi m thay đổi tiệm cận xiên luôn luôn tiếp xúc với parabol đó).

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (2m^2 - 1)x + m^2 - 5m + 1$. Tìm trên đường thẳng $x = 1$ tất cả những điểm mà đồ thị của hàm số không bao giờ đi qua.

Giải: Khi $x = 1$, hàm số đã cho có dạng: $y = 3m^2 - 8m + 1$. Giả sử điểm $(1, y_0)$ là điểm mà đồ thị hàm số không bao giờ đi qua. Khi đó phương trình: $y_0 = 3m^2 - 8m + 1$ vô nghiệm, hay là phương trình: $3m^2 - 8m + (1 - y_0) = 0$ vô nghiệm.

Điều này tương đương với $\Delta' = 16 - 3(1 - y_0) < 0$, hay là $y_0 < -\frac{13}{3}$.

Vậy trên đường thẳng $x = 1$, tất cả những điểm đó có tung độ $y < -\frac{13}{3}$, thì đồ thị của hàm số không bao giờ đi qua.

Chú ý: Có thể lý luận cách khác. Nếu $x = 1$, thì $y = 3m^2 - 8m + 1$. Vì vậy là parabol quay bề lõm về phía trên có tọa độ đỉnh là $(\frac{4}{3}, -\frac{13}{3})$, nên

$$3m^2 - 8m + 1 \geq -\frac{13}{3} (\forall m) \text{ (có dấu bằng khi } m = \frac{4}{3}).$$

Vậy khi $x = 1$, thì $y \geq -\frac{13}{3}$ với mọi m . Vậy trên đường thẳng $x = 1$ những điểm có tung độ: $y < -\frac{13}{3}$ đồ thị của hàm số không bao giờ đi qua.

3. Điểm mà chỉ có một số đồ thị của họ đã cho đi qua.

Điểm $A(x_0, y_0)$ là điểm có một số đồ thị của họ đã cho đi qua nếu tọa độ (x_0, y_0) thỏa mãn phương trình $y = f(m, x)$ ứng với một số giá trị thích hợp của m , tức là phương trình $y_0 = f(m, x_0)$ (ẩn số m) có một số nghiệm. Phương trình $y_0 = f(m, x_0)$ có bao

nhiều nghiệm thì có bấy nhiêu đồ thị của họ đã cho đi qua điểm $A(x_0, y_0)$. Nếu phương trình $y_0 = f(m, x_0)$ là phương trình đại số bậc n (bậc cao nhất của m trong phương trình bằng n) thì có không quá n đồ thị đi qua điểm $A(x_0, y_0)$.

Ví dụ 13. Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - m^2}{x - m}$. Giả sử $A(x_0, y_0)$

là một điểm tùy ý với $x_0 > 0$. Chứng minh rằng có đúng hai đồ thị của họ hàm số đã cho đi qua điểm $A(x_0, y_0)$.

Giải: Giả sử với một m nào đó, đồ thị của hàm số đã cho đi qua $A(x_0, y_0)$, tức là phương trình $y_0 = \frac{(m+1)x_0^2 - m^2}{x_0 - m}$ có nghiệm

$m \neq x_0$, hay phương trình $m^2 - (x_0^2 + y_0)m + (y_0x_0 - x_0^2) = 0$ (i) có nghiệm $m \neq x_0$.

Ta chứng minh rằng $x_0 > 0$, phương trình (i) luôn có hai nghiệm (khi đó hiển nhiên nghiệm ấy khác x_0). Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \Delta &= (x_0^2 + y_0)^2 - 4(y_0x_0 - x_0^2) = x_0^4 + 2x_0^2y_0 + y_0^2 - 4x_0y_0 + 4x_0^2 = \\ &= y_0^2 + 2x_0y_0(x_0 - 2) + x_0^4 + 4x_0^2 = |y_0 + x_0(x_0 - 2)|^2 - \\ &= x_0^2(x_0 - 2)^2 + x_0^4 + 4x_0^2 = |y_0 + x_0(x_0 - 2)|^2 + 4x_0^3. \end{aligned}$$

Rõ ràng $\Delta > 0$ với mọi $x_0 > 0$ và mọi y_0 . Vậy phương trình (i) luôn có 2 nghiệm. Từ đó suy ra có đúng hai đồ thị của họ hàm số đã cho đi qua $A(x_0, y_0)$.

Chú ý: Có thể chứng minh $\Delta > 0$ bằng cách coi $\Delta = y_0^2 + 2(x_0^2 - 2x_0)y_0 + x_0^4 + 4x_0^2$ là tam thức bậc hai đối với y_0 . Ta có $\Delta' = -4x_0^3 < 0$ với mọi $x_0 > 0$. Từ đó suy ra $\Delta > 0$ với mọi $x_0 > 0$ và y_0 .

Ví dụ 14. Cho hàm số $y = \frac{mx + 8}{3x + m}$. Chứng minh rằng với

một điểm $A(x_0, y_0)$ bất kỳ không nằm trên đường phân giác thứ nhất của hệ trục tọa độ luôn có duy nhất một đồ thị của hàm số đã cho đi qua.

Giải: Giả sử $A(x_0, y_0)$ bất kỳ không nằm trên đường phân giác thứ nhất của hệ trục tọa độ, tức là $y_0 \neq x_0$. Chúng ta cần chứng minh, tồn tại duy nhất một giá trị m để $y_0 = \frac{mx_0 + 8}{3x_0 + m}$, hay phương trình $(y_0 - x_0)m = 8 - 3x_0y_0$ (ẩn số m) có nghiệm duy nhất. Điều này hiển nhiên vì $y_0 - x_0 \neq 0$.

Ví dụ 15. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3m^2x + m}{mx + 1}$. Chứng minh rằng không tồn tại các điểm sao cho có nhiều hơn hai đồ thị của hàm số đã cho đi qua.

Giải: Giả sử ngược lại, tồn tại điểm $A(x_0, y_0)$ mà có nhiều hơn 2 đồ thị của hàm số đã cho đi qua, tức là tồn tại nhiều hơn hai giá trị m sao cho :

$$y_0 = \frac{x_0^2 + 3m^2x_0 + m}{mx_0 + 1}$$

hay phương trình $3x_0m^2 + (1 - x_0y_0)m + (x_0^2 - y_0) = 0$ có nhiều hơn hai nghiệm. Điều này vô lý, vì phương trình đó không thể có nhiều hơn hai nghiệm.

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 - mx$. a) Tìm tất cả những điểm cố định mà đồ thị của hàm số luôn đi qua với mọi m , b) Chứng minh rằng trên parabol $y = x^2 + 1$, tồn tại ít nhất hai điểm mà đồ thị của hàm số không thể đi qua, dù m lấy bất cứ giá trị nào.

2. [A-B1981] Cho hàm số $y = \frac{(m+1)(x^2 - 3x) + 2(2m+1)}{mx - m}$.

Chứng minh rằng với mọi m khác không, đồ thị của hàm số có một đường tiệm cận cố định, còn đường tiệm cận thứ hai luôn đi qua một điểm cố định.

3. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + m - x}{2x + m}$. Tìm tất cả những điểm cố định của họ đường cong này.

4. Cho hàm số $y = mx^2 + 2(m - 2)x - 3m + 1$. Chứng minh rằng với mọi m đồ thị của hàm số luôn đi qua hai điểm cố định.

5. Tìm điều kiện đối với α, β ($\beta \neq 0$) để đồ thị của hàm số:

$$y = \frac{mx + \alpha}{\beta x + m - 1} \text{ có một điểm cố định duy nhất.}$$

6. Cho hàm số:

$$y = \frac{1}{3}x^3 + (m - 1)\frac{x^2}{2} + (3 - m)x + 2.$$

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi, đồ thị của hàm số luôn đi qua hai điểm cố định.

b) Chứng minh rằng tồn tại điểm có hoành độ x_0 , sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại đó song song với nhau với mọi m .

7. Cho hàm số $y = (1 - 2m)x^4 + 3mx^2 - (m + 1)$. Chứng minh rằng với mọi điểm m đồ thị của hàm số luôn đi qua 4 điểm cố định.

8. Cho hàm số $y = \frac{(m - 1)x^2 - 2x - 10m}{x - 1}$.

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số luôn đi qua 1 điểm cố định. b) Tìm trên mặt phẳng tọa độ tất cả những điểm mà đồ thị của hàm số không thể đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào.

9. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 + 1$. Giả sử $A(x_0, y_0)$ là một điểm tùy ý trên đường thẳng $y = 1$. Chứng minh rằng ứng với mỗi điểm A luôn có duy nhất một giá trị m để đồ thị của hàm số đi qua A .

10. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m + 1)$. Với những giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1?

11. Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 \cos \alpha + x(2 \cos \alpha + \sin \alpha) - 2(1 - \sin \alpha)}{x + 2}.$$

a) Xác định α sao cho tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $(1, \sqrt{2})$.

b) Điểm $A(x, y)$ phải có tọa độ thỏa mãn điều kiện gì để tồn tại α sao cho tiệm cận xiên của đồ thị đi qua A .

12. Cho hàm số $y = (mx^2 + x + m)/(x + m)$. Tìm trên mặt phẳng tọa độ tất cả những điểm mà tiệm cận xiên của đồ thị của hàm số không thể đi qua khi m thay đổi.

13. Cho hàm số

$$y = \frac{mx^2 - (m^2 + m - 1)x + (m^2 - m + 2)}{x - m}.$$

a) Chứng minh rằng khi m thay đổi, đồ thị của hàm số không có điểm cố định. Tuy nhiên, chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị luôn đi qua một điểm cố định.

b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số không bao giờ đi qua điểm $(1, 1)$.

c) Gọi $A(x_0, y_0)$ là một điểm tùy ý với $x_0 > 1$. Chứng minh rằng ta luôn tìm được hai giá trị m thích hợp để đồ thị của hàm số đi qua A .

14. [A-B- 1979] Cho hàm số $y = (x - 2)(x^2 + mx + m^2 - 3)$.

a) Với những giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả những điểm trên trục tung mà đồ thị của hàm số không thể đi qua, khi m thay đổi.

15. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (m + 1)x + (2m + 1)^2}{x - (3m + 1)}.$

Tìm trên trục tung tất cả những điểm mà đồ thị của hàm số không thể đi qua, dù m lấy bất cứ giá trị nào.

16. Cho họ đường thẳng

$$y = \frac{m + 1}{m^2 + m + 1} x + \frac{m^2}{m^2 + m + 1}.$$

Tìm trên mặt phẳng tọa độ tất cả những điểm mà họ đường thẳng đã cho không thể đi qua, dù m lấy bất cứ giá trị nào.

17. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx - m^2}{x + m}$. Chứng minh rằng với một điểm bất kỳ trên mặt phẳng tọa độ mà không nằm trên trục tung luôn tìm được 2 giá trị m thích hợp để đồ thị của hàm số đi qua.

§2. Khảo sát sự tương giao giữa hai đồ thị

Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Gọi các đồ thị tương ứng của chúng là F và G. Khi đó, giữa F và G có thể xảy ra các khả năng sau đây:

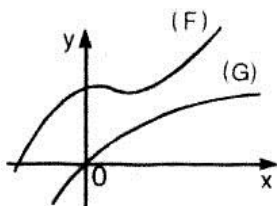
1) F và G không cắt nhau (hình 14).

Trong trường hợp này không tồn tại x để $f(x) = g(x)$.

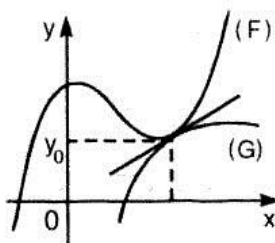
Hay nói cách khác : phương trình $f(x) = g(x)$ vô nghiệm.

2) F và G tiếp xúc nhau tại điểm A có hoành độ $x = x_0$ (hình 15).

Trong trường hợp này, tại điểm $x = x_0$ ta có $f(x_0) = g(x_0)$ đồng thời tại đó hai đồ thị có tiếp tuyến chung, nên tại đó ta cũng có (nếu $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0) : $f'(x_0) = g'(x_0)$ (theo ý nghĩa hình học của đạo hàm).



Hình 14



Hình 15

Vậy nếu F và G tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$ thì tại điểm tiếp xúc ta có :

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases} \quad (*)$$

Ngược lại, nếu x_0 là một nghiệm của hệ trên, ta dễ dàng suy ra F và G tiếp xúc với nhau tại điểm đó.

Như vậy F và G tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$ khi và chỉ khi $x = x_0$ là nghiệm của hệ $(*)$.

Nói chung, các hàm số mà chúng ta thường gặp ở phổ thông là những hàm đa thức hoặc hàm phân thức, cho nên kết luận trên đôi khi được áp dụng dưới dạng tương đương:

Phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm kép là x_0 (chú ý rằng khái niệm "nghiệm kép" chỉ áp dụng được cho các phương trình đại số).

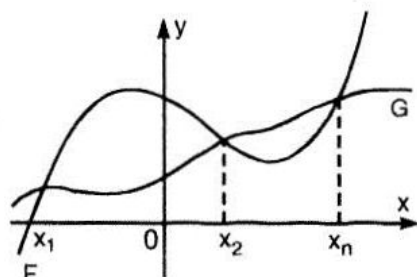
3) F và G cắt nhau tại các điểm có hoành độ là $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Trong trường hợp này ta có :

$$\begin{cases} f(x_1) = g(x_1) \\ \dots\dots\dots \\ f(x_n) = g(x_n) \end{cases}$$

tức là phương trình $f(x) = g(x)$ có các "nghiệm đơn" là $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ngược lại nếu $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$, ta dễ suy ra F và G cắt nhau tại các điểm có hoành độ tương ứng là $x_1, x_2, \dots, x_n$.



Hình 16

Như vậy : F và G cắt nhau tại các điểm có hoành độ $x_1, x_2, \dots, x_n$ khi và chỉ khi phương trình : $f(x) = g(x)$ có các nghiệm là $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Tóm lại: Việc khảo sát sự tương giao giữa đồ thị của các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tương đương với việc khảo sát sự có nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$. Phương trình $f(x) = g(x)$ có bao nhiêu nghiệm đơn thì F và G có bấy nhiêu giao điểm.

Ví dụ 1. [A.1972]. Cho hàm số $y = x^3 - m(x - 1) - 1$. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số tiếp xúc với trục hoành.

Giải: Ta có $y = x^3 - 1 - m(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1) - m(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1 - m)$.

Cách 1. Điểm mà tại đó đồ thị tiếp xúc với trục hoành ($y = 0$) là điểm có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x - 1)(x^2 + x + 1 - m) = 0 & (1) \\ 3x^2 - m = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $m = 3x^2$. Thay giá trị m vào (1) ta được:

$$(x - 1)(-2x^2 + x + 1) = 0.$$

Nghiệm của phương trình này là: $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$

Với $x_1 = 1$ ta được $m_1 = 3$, với $x_2 = -\frac{1}{2}$ ta được $m_2 = \frac{3}{4}$.

Vậy có hai giá trị của m : $m_1 = 3, m_2 = \frac{3}{4}$ để cho đồ thị của hàm số tiếp xúc với trục hoành.

Cách 2. Muốn đồ thị của hàm số tiếp xúc với trục hoành thì phương trình:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1 - m) = 0 \text{ phải có nghiệm kép.}$$

Điều này xảy ra khi:

* Hoặc phương trình: $x^2 + x + 1 - m = 0$ có nghiệm kép, tức là

$$\Delta = 1 - 4(1 - m) = 0, \text{ hay là } m = \frac{3}{4}.$$

* Hoặc phương trình: $x^2 + x + 1 - m = 0$ có nghiệm $x = 1$, tức là $1 + 1 + 1 - m = 0$, hay là $m = 3$.

Vậy chỉ có $m = 3, m = \frac{3}{4}$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^2 - mx - 2$ và

$$y = \frac{mx - 2}{x + 1}.$$

a) Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị của hai hàm số trên cùng đi qua một điểm cố định.

b) Xác định m để điểm đó trở thành điểm tiếp xúc của hai đồ thị.

Giải: a) Cách 1. Từ nhận xét hai đồ thị cùng đi qua một điểm cố định, suy ra hệ

$$\begin{cases} y = x^2 - mx - 2 \\ y = \frac{mx - 2}{x + 1} \end{cases}$$

luôn có nghiệm chung $x \neq -1$ với mọi m . Từ đó $x^2 - mx - 2 = \frac{mx - 2}{x + 1}$ luôn có nghiệm $x \neq -1$ với mọi m , hay phương trình (ẩn số x) $x(x + 2)[m - (x - 1)] = 0$ luôn có nghiệm $\forall m$. Rõ ràng phương trình này, với mọi m , luôn có nghiệm $x = 0$ và $x = -2$. Thay vào các phương trình hàm số giá trị $x = 0$ ta được $y = -2$ ($\forall m$). Vậy cả hai đồ thị hàm số đều đi qua điểm cố định $(0, -2)$ (còn $x = -2$ không phải hoành độ điểm cố định, vì khi đó $y = 2 + 2m$).

Cách 2. Chúng ta tìm điểm cố định của từng hàm số theo cách đã trình bày ở §1 sẽ thấy rằng cả hai hàm số đều có điểm cố định $(0, -2)$, do đó chúng cùng đi qua điểm cố định này.

Cách 3. Tìm điểm cố định đối với hàm số thứ nhất được $(0, -2)$. Kiểm tra thấy điểm này thỏa mãn phương trình hàm số thứ hai với mọi m . Từ đó suy ra kết luận của bài toán.

b) *Cách 1.* Điểm cố định $A(0, -2)$ là điểm tiếp xúc của hai đồ thị nghĩa là $x = 0$ là nghiệm kép của phương trình.

$$x^2 - mx - 2 = \frac{mx - 2}{x + 1}$$

hay của phương trình $x(x+2)(m-x+1)=0$. Muốn vậy $x = 0$ phải là nghiệm của phương trình $m - x + 1 = 0$ hay $m + 1 = 0$ hay $m = -1$.

Cách 2. Điểm cố định $A(0, -2)$ là điểm tiếp xúc của hai đồ thị khi tại điểm đó đạo hàm của hai hàm số này bằng nhau; đạo hàm của hàm số thứ nhất là $y' = 2x - m$ của hàm số thứ hai là:

$$y' = \frac{m(x+1) - mx + 2}{(x+1)^2}.$$

Với $x = 0$ hai giá trị của hai đạo hàm này phải bằng nhau, tức là $-m = m + 2$ hay $m = -1$.

Cách 3. Từ phương trình $x(x+2)[m-x+1] = 0$ suy ra 3 nghiệm: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = m+1$.

Ta lần lượt xét các trường hợp xảy ra nghiệm kép:

i) $x_1 = x_3$ suy ra $m = -1$;

ii) $x_2 = x_3$ suy ra $m = -3$.

Nhưng với $m = -3$, phương trình có nghiệm kép $x = -2$, do đó hai đồ thị không tiếp xúc nhau tại điểm $A(0, -2)$. Vậy chỉ có $m = -1$ thích hợp.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + x + m}{x + m}$. Chứng minh rằng khi m thay đổi tiệm cận xiên luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

Giải: Viết hàm số dưới dạng:

$$y = mx - m^2 + 1 + \frac{m^3}{x + m}$$

ta được tiệm cận xiên là $y = mx - m^2 + 1$, $m \neq 0$.

Cách 1. Gọi parabol mà luôn tiếp xúc với tiệm cận xiên nếu $m \neq 0$ là:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

khi đó phương trình $ax^2 + bx + c = mx - m^2 + 1$ hay phương trình $ax^2 + (b-m)x + c + m^2 - 1 = 0$ có nghiệm kép $\forall m \neq 0$. Điều kiện để phương trình này có nghiệm kép $\forall m \neq 0$ là $a \neq 0$ và

$$\Delta = (b-m)^2 - 4a(c + m^2 - 1) = 0 \quad (\forall m \neq 0)$$

$$\text{hay } (1 - 4a)m^2 - 2bm - 4a(c - 1) = 0 \quad (\forall m \neq 0).$$

Suy ra:

$$\begin{cases} 1 - 4a = 0 \\ 2b = 0 \\ 4a(c - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/4 \\ b = 0 \\ c = 1. \end{cases}$$

Vậy parabol cố định cần tìm là $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Cách 2. Xác định a, b, c để parabol $y = ax^2 + bx + c$ luôn nhận các đường thẳng $y = mx - m^2 + 1$ làm tiếp tuyến.

Gọi (x_0, y_0) là tiếp điểm. Khi đó

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = mx_0 - m^2 + 1 & (i) \\ 2ax_0 + b = m & (ii) \\ a \neq 0 \end{cases}$$

thỏa mãn với mọi m . Từ (ii) suy ra $x_0 = \frac{m-b}{2a}$, thay vào (i) ta được $(1-4a)m^2 - 2bm + b^2 - 4ac + 4a = 0$ ($\forall m$). (Bạn đọc tự kiểm tra).

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} 1 - 4a = 0 \\ 2b = 0 \\ b^2 - 4ac + 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/4 \\ b = 0 \\ c = 1. \end{cases}$$

Vậy parabol cần tìm là $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$.

a) Chứng minh rằng với mọi m đồ thị của hàm số luôn luôn cắt đường thẳng $y = x$ tại hai điểm phân biệt. Đồng thời chứng minh rằng khoảng cách giữa hai giao điểm luôn luôn không đổi.

b) Chứng minh rằng với mọi m đồ thị của hàm số luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định. Xác định phương trình đường thẳng đó.

c) Tìm trên mặt phẳng tọa độ tất cả những điểm mà đồ thị của hàm số không thể đi qua, khi m thay đổi.

Giải. a) Xét phương trình: $x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1 = x$, (1)
hay là : $x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0$. (2)

Phương trình này có biệt số $\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0$. Vậy phương trình (1) luôn luôn có hai nghiệm phân biệt. Tức là đồ thị của hàm số luôn luôn cắt đường thẳng $y = x$ tại hai điểm phân biệt với mọi m .

Nhận thấy khoảng cách giữa hai giao điểm chính là cạnh huyền của một tam giác vuông cân với cạnh góc vuông bằng :

$$|x_2 - x_1|,$$

trong đó: x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (2). Phương trình (2) có các nghiệm là :

$$x_1 = -m - 1, x_2 = -m + 1.$$

Vậy $|x_2 - x_1| = 2$ với mọi m .

Vậy khoảng cách giữa hai điểm luôn luôn không đổi và luôn luôn bằng $2\sqrt{2}$.

b) Giả sử rằng với mọi m đồ thị của hàm số luôn luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = ax + b$. Thế thì phương trình :

$x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1 = ax + b$ phải có nghiệm kép với mọi m .

Viết lại phương trình trên dưới dạng :

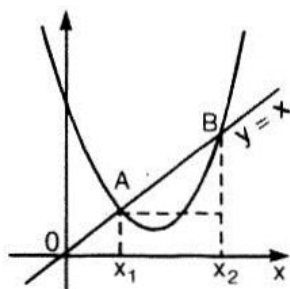
$$x^2 + (2m + 1 - a)x + m^2 - 1 - b = 0.$$

Ta phải có $\Delta = (2m + 1 - a)^2 - 4(m^2 - 1 - b) = 0$, với mọi m ,
hay là $4(1 - a)m + (1 - a)^2 + 4(1 + b) = 0$ với mọi m .

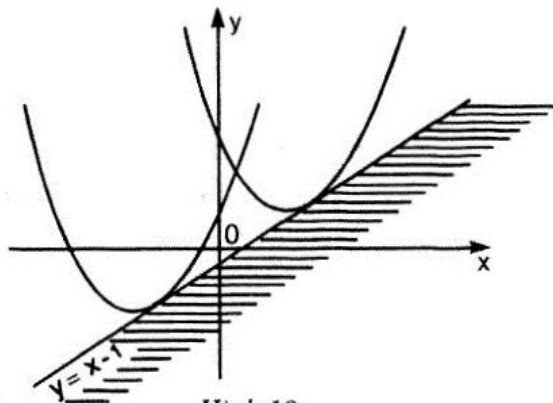
Điều này tương đương với : $\begin{cases} 1 - a = 0 \\ (1 - a)^2 + 4(1 + b) = 0. \end{cases}$

Giải hệ này ta được $a = 1$; $b = -1$.

Vậy, với mọi m , đồ thị của hàm số luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x - 1$.



Hình 17



Hình 18

c) Họ parabol đã cho có hệ số $a > 0$, nên parabol quay bề lõm lên trên, đồng thời họ luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x - 1$, nên bằng trực giác hình học ta thấy ngay: đồ thị của hàm số không thể đi qua tất cả những điểm của nửa mặt phẳng nằm dưới đường thẳng $y = x - 1$, dù m lấy bất cứ giá trị nào.

Ta chứng minh điều này một cách chặt chẽ bằng đại số: Giả sử (x_0, y_0) là điểm mà đồ thị của hàm số không bao giờ đi qua. Thế thì, phương trình:

$$y_0 = x_0^2 + (2m+1)x_0 + m^2 - 1 \text{ vô nghiệm.}$$

Tức là phương trình:

$$m^2 + 2x_0m + (x_0^2 + x_0 - 1 - y_0) = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Điều này tương đương với:

$$\Delta = y_0 + 1 - x_0 < 0 \text{ hay là } y_0 < x_0 - 1.$$

Tức là những điểm mà đồ thị không thể đi qua là những điểm nằm phía dưới đường thẳng $y = x - 1$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = x^3 + (m-2)x^2 - 2mx + m$. Chứng minh rằng với mọi m đồ thị của hàm số luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại mọi điểm cố định. Hãy xác định đường thẳng và điểm cố định đó.

Giải: Giả sử rằng đồ thị của hàm số luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = ax + b$ tại điểm $A(x_0, y_0)$, thế thì tại điểm đó ta phải có:

$$\begin{cases} x_0^3 + (m-2)x_0^2 - 2mx_0 + m = ax_0 + b, \\ 3x_0^3 + 2(m-2)x_0 - 2m = a. \end{cases}$$

với mọi m .

hay là :

$$\begin{cases} (x_0^2 - 2x_0 + 1)m + (x_0^3 - 2x_0^2 - ax_0 - b) = 0 \\ (2x_0 - 2)m + (3x_0^2 - 4x_0 - a) = 0, \end{cases}$$

với mọi m . Vậy ta phải có:

$$\begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \\ x_0^3 - 2x_0^2 - ax_0 - b = 0, \\ 2x_0 - 2 = 0, \\ 3x_0^2 - 4x_0 - a = 0. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được: $x_0 = 1, a = -1, b = 0$.

Vậy, đồ thị của hàm số luôn luôn tiếp xúc với đường thẳng:

$$y = -x \text{ tại điểm } A(1, -1).$$

Chú ý: Có thể giải bài toán bằng cách khác: trước hết tìm điểm cố định của đồ thị, đó là điểm $A(1, -1)$. Sau đó, chứng minh rằng tại điểm đó đồ thị luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định (tương đương với việc chứng minh tại đó mọi đường cong có tiếp tuyến chung, điều này tương đương với việc chứng minh tại đó $y'(1)$ luôn luôn bằng nhau).

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = \frac{(3m+1)x - (m^2 - m)}{x + m}, (m \neq 0)$.

Chứng minh rằng với mọi m đồ thị của hàm số luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định. Xác định phương trình của hai đường thẳng đó.

Giải: Giả sử rằng với mọi $m \neq 0$ đồ thị của hàm số luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = ax + b$. Thế thì, phương trình:

$$\frac{(3m+1)x - (m^2 - m)}{x + m} = ax + b$$

phải có nghiệm kép với mọi $m \neq 0$.

hay là phương trình:

$$ax^2 + [(a-3)m + (b-1)]x + [m^2 + (b-1)m] = 0$$

phải có nghiệm kép với mọi $m \neq 0$.

Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = [(a-3)m + (b-1)]^2 - 4a[m^2 + (b-1)m] = 0 \end{cases}$$

với mọi $m \neq 0$.

hay là

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ (a^2 - 10a + 9)m^2 - 2(b-1)(a+3)m + (b-1)^2 = 0, \forall m \neq 0. \end{cases}$$

Như vậy ta phải có:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ a^2 - 10a + 9 = 0, \\ (b-1)(a+3) = 0, \\ (b-1)^2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ này ta được: } \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} a = 9 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy với m thay đổi, đồ thị của hàm số luôn luôn tiếp xúc với hai đường thẳng $y = x + 1$ và $y = 9x + 1$.

Chú ý: Trong ví dụ 10 của §1, ta đã chứng minh được những điểm nằm bên trong hai góc nhọn tạo bởi các đường thẳng: $y = x + 1$ và $y = 9x + 1$ là những điểm mà đồ thị của hàm số không thể đi qua, khi m thay đổi.

BÀI TẬP

1. Cho hai hàm số $y = x^2 - mx - 2$ và $y = \frac{mx - 2}{x + 1}$.

a) Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị của hai hàm số trên cùng đi qua một điểm cố định.

b) Xác định m để điểm cố định đó trở thành điểm tiếp xúc của hai đồ thị.

2. Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + 1$.

Xác định m sao cho đồ thị của hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = 5$. Hãy chỉ rõ, lúc đó điểm tiếp xúc là điểm gì của đồ thị?

3. Cho $y = \frac{x^2 + (am + b)x + b^2 + m^2}{mx - 1}$.

a) Chứng minh rằng không tồn tại các giá trị a, b để đồ thị có điểm cố định khi m thay đổi.

b) Xác định a và b để đồ thị của hàm số luôn luôn tiếp xúc với trục hoành với mọi m .

4. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + x + m}{x + m}$.

Chứng minh rằng với mọi m , tiệm cận xiên của đồ thị của hàm số luôn tiếp xúc với một parabol cố định. Xác định parabol đó.

5. Cho hàm số $y = x^3 + (m - 3)x^2 - (2m - 1)x - 3(m + 1)$

a) Xác định m để đồ thị của hàm số tiếp xúc với trục hoành.

b) Với những giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt với hoành độ dương.

6. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (1 - m)x + 1 + m}{x - m} \quad (m \neq -1)$

Chứng minh rằng với mọi m đồ thị của hàm số luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định. Xác định đường thẳng và điểm cố định đó.

7. Cho hàm số $y = \frac{(m - 1)x + m}{x - m}, (m \neq 0)$.

a) Chứng minh rằng với mọi m đồ thị của hàm số luôn luôn tiếp xúc với nhau tại một điểm cố định.

b) Tìm tất cả các đường thẳng (cố định) trên mặt phẳng tọa độ mà đồ thị của hàm số không bao giờ cắt đường thẳng đó, dù m lấy bất cứ giá trị nào.

8. Cho hàm số $y = mx^3 + m^2x^2 + x - 1$.

a) Xác định m , biết rằng đồ thị của hàm số tiếp xúc với trục hoành tại một điểm và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -1$.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số ứng với m tìm được.

9. Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - m^2}{x - m}$

Chứng minh rằng mọi tiệm cận xiên của đồ thị của hàm số luôn tiếp xúc với một parabol cố định. Xác định parabol đó. Từ đó suy ra tất cả những điểm, mà tiệm cận xiên không thể đi qua, dù m lấy bất cứ giá trị nào.

10. Xác định tất cả các giá trị a và b sao cho đồ thị của hàm số $y = x^2 - (2m + a)x + m^2 + b - a$ luôn luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = -x + 1$ với mọi m .

11. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

Xác định m sao cho đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị tại hai điểm đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

12. Cho hàm số $y = (x - 1)[x^2 - 2(m + 1)x + m + 1]$. Với những giá trị nào của m , thì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt: $A(1, 0)$; $B(x_1, 0)$; $C(x_2, 0)$ cách đều nhau: $AB = BC$?

13. a) Giả sử đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục hoành. Chứng minh rằng khi đó đường thẳng $y = 2ax + b$ sẽ cắt đồ thị đã cho.

b) Tìm điều kiện cần và đủ để parabol $y = ax^2 + bx + c$:

* Có một điểm với giá trị đạo hàm tại điểm đó bằng tung độ của điểm đó.

* Có hai điểm với giá trị hàm tại đó bằng tung độ của các điểm đó.

14. Cho hàm số $y = \frac{(m+p)x+p}{x+m+2p}$, trong đó m là tham số

thay đổi, còn p là một hằng số cố định. Chứng minh rằng hai tính chất sau đây là tương đương:

a) Khi m thay đổi, đồ thị của hàm số có một điểm cố định duy nhất.

b) Khi m thay đổi, đồ thị của hàm số luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

15. Biện luận số nghiệm của phương trình:

$\frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^2}{2} + a = 0$ tùy theo giá trị của a (n là số nguyên dương cho trước).

16. Với những giá trị nào của m thì phương trình: $\sin^2 x + \sin^2 3x - m \cos^2 x = 0$ có nghiệm.

17. Chứng minh rằng phương trình:

$3x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Đồng thời chứng minh rằng:

$$-0.3 < x_1 < 0.2 \text{ và } 0.4 < x_2 < 0.5$$

§3. Ba bài toán cơ bản về phương trình tiếp tuyến

Cho hàm số $y = y(x)$ (1)

Các câu hỏi về phương trình tiếp tuyến (*) thường được đặt ra dưới ba dạng cơ bản sau đây:

1) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của (1) tại điểm $M(x_0, y_0)$ cho trước (nằm trên đồ thị). (Khi đó hiển nhiên M là tiếp điểm).

2) Qua điểm $M(x_0, y_0)$ viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (1).

3) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của (1) với hệ số góc cho trước (hệ số góc này có thể cho trực tiếp hoặc gián tiếp).

(*) Chúng ta chỉ xét những tiếp tuyến là đường thẳng không song song với trục tung, có nghĩa là đường thẳng có dạng $y = ax + b$ (còn đường thẳng song song với trục tung có dạng $x = x_0$).

1. Bài toán thứ nhất: *Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của (1) tại điểm $M(x_0, y_0)$ cho trước.*

Giả sử rằng hàm số $y = y(x)$ có đạo hàm tại x_0 . Khi đó phương trình tiếp tuyến với đồ thị (1) tại điểm $M(x_0, y_0)$ là

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. (i)

a) Chứng minh rằng điểm $U(1, -1)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại điểm $U(1, -1)$. Chứng minh rằng các tiếp tuyến khác đều không đi qua điểm U .

c) Chứng minh rằng trong các tiếp tuyến với đồ thị, tiếp tuyến tại $U(1, -1)$ có hệ số góc nhỏ nhất.

Giải: a) Đặt

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y - 1 \end{cases} \quad (ii)$$

Thay (ii) vào (i) ta được

$$Y - 1 = (X + 1)^3 - 3(X + 1)^2 + 1 = X^3 - 3X - 1 \text{ hay } Y = X^3 - 3X.$$

Đây là hàm số lẻ, vậy đồ thị hàm số đã cho nhận $U(1, -1)$ làm tâm đối xứng.

b) *Cách 1.* Tính $y'(x) = 3x^2 - 6x$,

$$y'(1) = -3$$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại điểm $U(1, -1)$ là

$$y + 1 = -3(x - 1) \text{ hay } y = -3x + 2.$$

Chú ý: Trong nhiều bài toán chúng ta sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai đồ thị của hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ như sau: Đồ thị của $f = f(x)$ tiếp xúc với đồ thị của $y = g(x)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

có nghiệm. Giá trị x , nghiệm của hệ phương trình này, chính là hoành độ tiếp điểm.

Các đồ thị ấy cũng tiếp xúc với nhau khi và chỉ khi phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm kép và nghiệm kép đó chính là hoành độ tiếp điểm. Điều kiện này thường dùng trong các bài toán mà phương trình $f(x) = g(x)$ dễ tìm nghiệm.

Trên cơ sở đó chúng ta có thể giải câu b) của ví dụ 1 bằng cách sau đây.

Cách 2. Gọi tiếp tuyến cần tìm là $y = ax + b$. Vì tiếp tuyến này đi qua điểm $U(1, -1)$ nên $y = a(x - 1) - 1$. Đường thẳng đó tiếp xúc với đồ thị, nếu hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = ax - a - 1 & \text{(iii)} \\ 3x^2 - 6x = a & \text{(iv)} \end{cases}$$

Thay a từ (iv) vào (iii) ta được $x^3 - 3x^2 + 1 = (3x^2 - 6x)x - (3x^2 - 6x) - 1$ hay $2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0 \Rightarrow 2(x - 1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$. Do đó thay vào (iv) được $a = -3$ và vì vậy $b = 2$.

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $y = -3x + 2$.

Cách 3. Gọi tiếp tuyến tại điểm $U(1, -1)$ là $y = ax + b$. Vì đường thẳng này tiếp xúc với đồ thị tại $U(1, -1)$ nên

$$a = y'(1) = -3.$$

Mặt khác $U(1, -1)$ nằm trên đường thẳng nên $-1 = a + b$ hay $b = -a - 1$, do đó $b = 2$. Vì vậy tiếp tuyến cần tìm là $y = -3x + 2$.

Bây giờ chúng ta chứng minh rằng các tiếp tuyến khác không đi qua điểm $U(1, -1)$.

Giả sử có một tiếp tuyến khác của đồ thị tại điểm $A(x_1, y_1)$ đi qua điểm $U(1, -1)$. Phương trình của tiếp tuyến ấy là $y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1)$ ($x_1 \neq 1$).

Vì $y_1 = x_1^3 - 3x_1^2 + 1$; $y'(x_1) = 3x_1^2 - 6x_1$ nên $y = (x_1^3 - 3x_1^2 + 1) + (3x_1^2 - 6x_1)(x - x_1)$. Vì tiếp tuyến này đi qua điểm $U(1, -1)$ nên $-1 = x_1^3 - 3x_1^2 + 1 + (3x_1^2 - 6x_1)(1 - x_1)$.

Từ đây suy ra $(x_1 - 1)^3 = 0$. Vậy $x_1 = 1$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $A \neq U$. Vậy mọi tiếp tuyến khác đều không đi qua $U(1, -1)$.

c) Tại $U(1, -1)$ có $y'(1) = -3$.

Xét $y'(x) = 3x^2 - 6x = 3(x - 1)^2 - 3 \geq -3$ ($\forall x$)

Vậy $y'(x) \geq y'(1)$ ($\forall x$).

Do đó tiếp tuyến tại $U(1, -1)$ có hệ số góc nhỏ nhất.

2. Bài toán thứ hai : *Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $y = y(x)$ biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(x_0, y_0)$ cho trước.*

Có nhiều cách giải bài toán này, trong đó có hai cách cơ bản sau đây:

Cách giải thứ nhất. (Nội dung cơ bản là xác định hệ số góc của tiếp tuyến). * Viết phương trình đường thẳng đi qua $M(x_0, y_0)$ cho trước với hệ số góc k :

$$\text{hay} \quad \begin{cases} y - y_0 = k(x - x_0) \\ y = kx + (y_0 - kx_0) \end{cases} \quad (*)$$

* Từ điều kiện đường thẳng (*) tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = y(x)$ sẽ tìm được giá trị k thích hợp rồi thay vào (*). Có bao nhiêu giá trị k thích hợp tìm được thì qua $M(x_0, y_0)$ có thể kẻ được bấy nhiêu tiếp tuyến với đồ thị của hàm số đã cho.

Cách giải thứ hai. (Nội dung cơ bản là xác định tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị).

* Gọi (x_1, y_1) là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm đối với đồ thị. Khi đó, theo bài toán thứ nhất, tiếp tuyến tại (x_1, y_1) là

$$\begin{cases} y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1) \\ y_1 = y(x_1) \end{cases} \quad (**)$$

* Vì tiếp tuyến này đi qua $M(x_0, y_0)$ nên

$$y_0 - y(x_1) = y'(x_1)(x_0 - x_1) \quad (***)$$

Chúng ta được phương trình với ẩn số x_1 (hoành độ tiếp điểm). Giải phương trình (***) sẽ tìm được x_1 rồi thay vào (**) sẽ được phương trình tiếp tuyến cần tìm (phương trình (***) cho bao nhiêu nghiệm thì qua $M(x_0, y_0)$ có thể kẻ được không quá bấy nhiêu tiếp tuyến với đường cong đã cho. Trong trường hợp một đường thẳng tiếp xúc với đồ thị tại nhiều điểm khác nhau thì số tiếp tuyến kẻ được ít hơn số nghiệm x_1 tìm được).

Nhận xét. Trong hai cách giải trình bày ở trên thì cách thứ nhất rất thuận lợi trong việc giải các bài toán liên quan đến các tiếp tuyến vuông góc nhau.

Ví dụ 2. Qua điểm $(0, -\frac{8}{3})$ hãy viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{8}{3}$.

Giải: Cách 1.

Phương trình đường thẳng đi qua $(0, -\frac{8}{3})$ với hệ số góc k là $y = kx - \frac{8}{3}$.

Đường thẳng này phải tiếp xúc với đồ thị hàm số đã cho nên phương trình $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{8}{3} = kx - \frac{8}{3}$ phải có nghiệm kép hay phương trình $x[x^2 - 6x + 3(3-k)] = 0$ có nghiệm kép, tức là hoặc phương trình $x^2 - 6x + 3(3-k) = 0$ có nghiệm kép, suy ra $\Delta' = 3k = 0$ hay $k = 0$ hoặc phương trình $x^2 - 6x + 3(3-k) = 0$ phải có nghiệm $x = 0$, suy ra $3(3-k) = 0$, hay $k = 3$. Vậy qua $(0, -\frac{8}{3})$ có hai tiếp tuyến với đồ thị (ứng với $k = 0$) là

$y = -\frac{8}{3}$ và (ứng với $k = 3$) $y = 3x - \frac{8}{3}$.

Cách 2. Gọi hoành độ tiếp điểm là x_1 . Tung độ:

$$y_1 = \frac{1}{3}x_1^3 - 2x_1^2 + 3x_1 - \frac{8}{3}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại (x_1, y_1) là:

$$y - (\frac{1}{3}x_1^3 - 2x_1^2 + 3x_1 - \frac{8}{3}) = (x_1^2 - 4x_1 + 3)(x - x_1). \quad (****)$$

Vì tiếp tuyến này đi qua $(0, -\frac{8}{3})$ nên

$$-\frac{8}{3} - (\frac{1}{3}x_1^3 - 2x_1^2 + 3x_1 - \frac{8}{3}) = (x_1^2 - 4x_1 + 3)(-x_1)$$

hay $2x_1^2(x_1 - 3) = 0$ suy ra $x_1 = 0$ và $x_1 = 3$.

Với $x_1 = 0$ chúng ta có phương trình tiếp tuyến là (thay $x_1 = 0$ vào (****)).

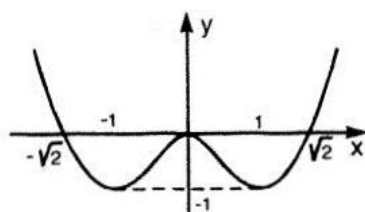
$$y = 3x - \frac{8}{3}.$$

Với $x_1 = 3$ chúng ta được phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{8}{3}$.

vậy qua $(0, -\frac{8}{3})$ chúng ta vẽ được hai tiếp tuyến với đồ thị.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị, biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $(0, -1)$.

Giải : Giả sử (x_1, y_1) là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị khi đó phương trình tiếp tuyến tại (x_1, y_1) là $y - (x_1^4 - 2x_1^2) = (4x_1^3 - 4x_1)(x - x_1)$ (*). Vì tiếp tuyến này đi qua điểm $(0, -1)$ nên $-1 - x_1^4 + 2x_1^2 = (4x_1^3 - 4x_1)(-x_1)$



Hình 19

hay $3x_1^4 - 2x_1^2 - 1 = 0$. Giải phương trình trùng phương này chúng ta được hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_1 = -1$. Thay các giá trị này vào (*) ta sẽ được các tiếp tuyến.

Với $x_1 = 1$ ta có tiếp tuyến $y = -1$, với $x = -1$ ta có tiếp

tuyến $y = -1$. Như vậy hai tiếp tuyến đó trùng nhau, tức là qua $(0, -1)$ ta chỉ kẻ được một tiếp tuyến với đồ thị đó là đường thẳng $y = -1$.

Chú ý: Ta có thể dùng phương pháp thứ nhất đã trình bày ở trên (tìm hệ số góc tiếp tuyến). Đường thẳng đi qua $(0, -1)$ là $y = kx - 1$. khi đó

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 = kx - 1 \\ 4x^3 - 4x = k \end{cases}$$

Giai hệ này sẽ được $x = \pm 1, k = 0$. Vậy chỉ có 1 tiếp tuyến qua $(0, -1)$ là $y = -1$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx + m}{x}$.

a) Với $m = 1$, hãy viết các phương trình của các đường thẳng đi qua điểm $(2, -1)$ và tiếp xúc với đồ thị đã cho. Chứng minh rằng các đường thẳng ấy vuông góc với nhau.

b) Với giá trị nào của m thì từ điểm $(2, -1)$ có thể kẻ được 2 tiếp tuyến với đồ thị và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau?

Giải: a) Với $m = 1$ ta có $y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$.

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $(2, -1)$ là:

$$y = kx - 2k - 1 \quad (*)$$

đường thẳng này phải tiếp xúc với đồ thị nên phương trình

$\frac{x^2 - x + 1}{x} = kx - 2k - 1$ phải có nghiệm kép, suy ra phương

trình $(1 - k)x^2 + 2kx + 1 = 0$ có nghiệm kép $x \neq 0$.

Muốn vậy phải thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} 1 - k \neq 0, -\frac{k}{1 - k} \neq 0 \\ \Delta' = k^2 + k - 1 = 0. \end{cases}$$

Nghiệm $k \neq 1, k \neq 0$ của phương trình $k^2 + k - 1 = 0$ cho hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm. Phương trình này có hai nghiệm (vì có $\Delta = 5 > 0$). Gọi k_1, k_2 là hai nghiệm của phương trình đó, khi đó $k_1 \cdot k_2 = -1$ (theo định lý Viét), vậy 2 tiếp tuyến cần tìm vuông góc nhau.

Ta có: $k_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, k_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, thay vào (*) ta được các phương trình tiếp tuyến là:

$$y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}x - \sqrt{5} \quad \text{và} \quad y = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}x + \sqrt{5}.$$

Chú ý: Có thể kiểm tra tính vuông góc của hai tiếp tuyến một cách trực tiếp:

$$k_1 \cdot k_2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) = -1.$$

* Đường nhiên có thể dùng phương pháp thứ hai để viết các phương trình tiếp tuyến, sau đó kiểm tra trực tiếp tính vuông góc của hai tiếp tuyến. Nhưng đối với câu b) của bài tập này, tốt nhất là dùng phương pháp thứ nhất.

b) Phương trình đường thẳng đi qua điểm $(2, -1)$ là:

$$y = kx - 2k - 1.$$

Đường thẳng này phải tiếp xúc với đồ thị hàm số đã cho.

nên phương trình $\frac{x^2 - mx + m}{x}$ phải có nghiệm kép $x \neq 0$ suy ra phương trình $(1 - k)x^2 - (m - 1 - 2k)x + m = 0$ có nghiệm kép. Muốn vậy phải thỏa mãn

$$\begin{cases} k \neq 1, \frac{m - 1 - 2k}{2(1 - k)} \neq 0 \\ \Delta = (m - 1 - 2k)^2 - 4m(1 - k) = 0 \end{cases}$$

hay $\begin{cases} k \neq 1, k \neq \frac{m - 1}{2}, \\ 4k^2 + 4k + (m^2 - 6m + 1) = 0. \end{cases} \quad (*)$

Muốn từ điểm $(2, -1)$ kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị, phương trình (*) phải có 2 nghiệm k_1, k_2 và để 2 tiếp tuyến ấy vuông góc nhau thì $k_1 \cdot k_2 = -1$ (chú ý rằng từ điều kiện $k_1 \cdot k_2 = -1$, theo định lý Viét và định lý đảo về dấu tam thức bậc 2 suy ra phương trình (*) có 2 nghiệm). Tóm lại m cần thỏa mãn điều kiện:

$$-1 = k_1 \cdot k_2 = \frac{m^2 - 6m + 1}{4}$$

hay $m^2 - 6m + 5 = 0$, giải ra được $m = 1$, $m = 5$. Rõ ràng với $m = 1$, phương trình (*) trở thành

$$4k^2 + 4k - 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (câu a),}$$

$$k_{1,2} \neq 1; k_{1,2} \neq 0.$$

Với $m = 5$, phương trình (*) trở thành:

$$4k^2 + 4k - 4 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \neq 1, k_{1,2} \neq 2.$$

Vậy $m = 1$ và $m = 5$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + m - 1}{x + 1}$.

a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để trên mặt phẳng tọa độ tồn tại điểm, sao cho từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị và 2 tiếp tuyến đó vuông góc với nhau là $m > 0$.

b) Chứng minh rằng $m > 0$ cũng là điều kiện cần và đủ để hàm số đã cho có cực đại.

Giải: a) Gọi $M(x_0, y_0)$ là điểm thỏa mãn đầu bài. Phương trình đường thẳng qua M là $y = k(x - x_0) + y_0$. Đường thẳng này là tiếp tuyến với đồ thị khi và chỉ khi phương trình $\frac{x^2 + m - 1}{x + 1} = k(x - x_0) + y_0$ có nghiệm kép $x \neq -1$. Suy ra phương trình $(1 - k)x^2 + (x_0 - 1)k - y_0)x + (kx_0 - y_0 + m - 1) = 0$. Có nghiệm kép $x \neq -1$. Điều kiện cần và đủ để phương trình này có nghiệm kép $x \neq -1$ là:

$$\begin{cases} k \neq 1, \frac{(x_0 - 1)k - y_0}{2(1 - k)} \neq 1 \\ \Delta = [(x_0 - 1)k - y_0]^2 - 4(1 - k)(kx_0 - y_0 - 1 + m) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Phương trình (*) viết lại dưới dạng:

$$\begin{aligned} & (x_0 + 1)^2 k^2 - 2(y_0 x_0 + y_0 + 2x_0 - m + 1)k + \\ & + [(y_0 + 2)^2 - 4m] = 0 \end{aligned} \quad (**)$$

Điều kiện cần và đủ để từ $M(x_0, y_0)$ kẻ được 2 tiếp tuyến tới đồ thị và 2 tiếp tuyến ấy vuông góc nhau là phương trình (**) có hai nghiệm k_1, k_2 và $k_1 \cdot k_2 = -1$. (Nhưng điều kiện $k_1 \cdot k_2 = -1$ suy ra phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt). Theo định lý Viét:

$$-1 = k_1 \cdot k_2 = \frac{(y_0 + 2)^2 - 4m}{(x_0 + 1)^2} \text{ và } x_0 \neq -1$$

hay $(x_0 + 1)^2 + (y_0 + 2)^2 = 4m$; $x_0 \neq -1$

Rõ ràng, điều kiện cần và đủ để tồn tại điểm $M(x_0, y_0)$ thoả mãn điều kiện đầu bài là $m > 0$ (với $m = 0$ đồ thị suy biến thành $y = x - 1$, $x \neq -1$, nên không thể kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc nhau với đồ thị).

b) Viết hàm số dưới dạng $y = x - 1 + \frac{m}{x + 1}$.

$$y' = 1 - \frac{m}{(x + 1)^2}$$

Phương trình $y' = 0$ suy ra $(x + 1)^2 = m$. Điều kiện cần và đủ để hàm số có cực đại (lưu ý rằng những hàm số mà đồ thị của nó có tâm đối xứng như $y = (ax^2 + bx + c)/(ax + c)$, $y = ax^3 + bx^2 + cx + dm$ đã có cực đại thì có cực tiểu và ngược lại) là phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt. Để phương trình đó có 2 nghiệm phân biệt điều kiện cần và đủ rõ ràng là $m > 0$, vậy $m > 0$ là điều kiện cần và đủ để hàm số có cực đại.

3. Bài toán thứ ba: *Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $y = y(x)$ với hệ số góc k cho trước.*

Gọi hoành độ tiếp điểm là x_1 . Theo ý nghĩa hình học của tiếp tuyến ta có:

$$y'(x_1) = k.$$

Đây là phương trình với ẩn số là x_1 . Sau khi giải phương trình này, ta tìm được x_1 và tính được $y_1 = y(x_1)$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y - y_1 = k(x - x_1)$ hay $y = k(x - x_1) + y_1$.

Việc cho hệ số góc k có thể cho theo 2 cách:

a) Cách cho trực tiếp: Các khái niệm sau đây tương đương:

* Hệ số góc của tiếp tuyến.

* Độ dốc (độ nghiêng) của tiếp tuyến.

* $\operatorname{tg} \alpha$, trong đó α là góc mà tiếp tuyến lập với chiều dương của trục hoành.

Nếu cho giá trị của một trong các đại lượng ấy cũng là cho hệ số góc.

b) Cách cho gián tiếp: cho hệ số góc của tiếp tuyến thông qua hệ số góc của một đường thẳng cho trước. Thông thường hay cho dưới các dạng sau đây:

* Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = y(x)$, biết rằng tiếp tuyến này song song với đường thẳng $y = ax + b$.

Trong trường hợp này hệ số góc của tiếp tuyến sẽ là $k = a$.

* Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = y(x)$, biết rằng tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

Trong trường hợp này hệ số góc k của tiếp tuyến phải thỏa mãn $k \cdot a = -1$ hay $k = -\frac{1}{a}$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị, biết rằng tiếp tuyến đó có hệ số góc bằng 2.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị, biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = x - 1$.

c) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị, biết rằng tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{4}{5}x + 7$.

Giải:

Ta viết hàm số dưới dạng $y = x - 1 - \frac{1}{x - 2}$.

a) Tính $y'(x) = 1 + \frac{1}{(x - 2)^2}$.

Cách 1. Gọi x_1 là hoành độ tiếp điểm, khi đó

$$y'(x_1) = 1 + \frac{1}{(x_1 - 2)^2} = 2 \text{ hay } (x_1 - 2)^2 = 1.$$

Từ đây ta được $x_1 = 3$ và $x_1 = 1$.

Với $x_1 = 3, y_1 = 1$, tiếp tuyến là $y = 2(x - 3) + 1$ hay $y = 2x - 5$.

Với $x_1 = 1, y_1 = 1$, tiếp tuyến là $y = 2(x - 1) + 1$ hay $y = 2x - 1$.

Cách 2. Tiếp tuyến cần tìm có phương trình dạng $y = 2x + b$. Đường thẳng này phải tiếp xúc với đồ thị hàm số đã cho, hay

phương trình $\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} = 2x + b$ phải có nghiệm kép $x \neq 2$.

suy ra phương trình $x^2 + (b - 1)x - (2b + 1) = 0$ có nghiệm kép $x \neq 2$. Muốn vậy $\Delta = (b - 1)^2 + 4(2b + 1) = 0 \Rightarrow x =$

$-\frac{b-1}{2} \neq -2, b \neq -3$, hay $b^2 + 6b + 5 = 0$. Giải phương trình này

được $b = -1$ và $b = -5$ thỏa mãn điều kiện $b \neq -3$. Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn điều kiện đầu bài là $y = 2x - 1$ và $y = 2x - 5$.

b) Tiếp tuyến cần tìm song song với đường thẳng $y = x - 1$, vậy nó có hệ số góc $k = 1$.

Cách 1. Gọi x_1 là hoành độ tiếp điểm, khi đó

$$y'(x_1) = 1 + \frac{1}{(x_1 - 2)^2} = 1 \text{ hay } \frac{1}{(x_1 - 2)^2} = 0.$$

Phương trình này vô nghiệm. Vậy không có tiếp tuyến nào song song với đường thẳng $y = x - 1$.

Cách 2. Tiếp tuyến cần tìm có phương trình dạng $y = x + b$. Đường thẳng này tiếp xúc với đồ thị của hàm số đã cho nên

phương trình $\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} = x + b$ phải có nghiệm kép $x \neq 2$, suy

ra phương trình $(b + 1)x - (2b + 1) = 0$ có nghiệm kép $x \neq 2$, điều này không thể xảy ra vì đây là phương trình bậc nhất nên không thể có nghiệm kép. Vậy không có tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x - 1$.

c) Tiếp tuyến cần tìm vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{4}{5}x + 7$, vậy nó có hệ số góc k thỏa mãn $k(-\frac{4}{5}) = -1$

$$\text{hay } k = \frac{5}{4}.$$

Có thể áp dụng 1 trong 2 phương pháp trình bày ở câu a) chúng ta được hai tiếp tuyến là:

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{7}{2} \text{ và } y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = x^3 + x^2 + x + 1$.

a) Chứng minh rằng trên đồ thị của hàm số không tồn tại điểm mà tiếp tuyến với đồ thị song song với trục hoành.

b) Tìm trên đồ thị hàm số những điểm mà tiếp tuyến với đồ thị tại đó song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

c) Chứng minh rằng trên đồ thị hàm số không tồn tại 2 điểm sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại 2 điểm đó vuông góc nhau.

d) Với những giá trị này của k , ít nhất một điểm mà tiếp tuyến với đồ thị tại đó vuông góc với đường thẳng $y = kx$ ($k \neq 0$)?

Giải: Tính $y'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

a) Trục hoành có phương trình $y = 0$. Muốn tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x song song với trục hoành phải thỏa mãn điều kiện $y'(x) = 0$ hay $3x^2 + 2x + 1 = 0$.

Phương trình này vô nghiệm vì có $\Delta' = -2 < 0$. Vậy không tồn tại điểm mà tiếp tuyến tại đó song song với trục hoành.

b) Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất có phương trình $y = x$, đường này có hệ số góc bằng 1.

Gọi x_1 là hoành độ của điểm mà tiếp tuyến tại đó song song với đường thẳng $y = x$, thế thì $y'(x_1) = 3x_1^2 + 2x_1 + 1 = 1$

hay $3x_1^2 + 2x_1 = 0$ ta được $x_1 = 0$ và $x_1 = -\frac{2}{3}$, với $x_1 = 0$:

$$y_1 = 1; \text{ với } x_1 = -\frac{2}{3}, y_1 = -\frac{13}{27}.$$

Vậy trên đồ thị có 2 điểm $(0, 1)$ và $(-\frac{2}{3}, \frac{13}{27})$ thỏa mãn đầu bài.

c) Ta có $y'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0, \forall x$ (vì $\Delta < 0$). Do đó không tồn tại 2 điểm với hoành độ x_1, x_2 sao cho $y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$, tức là không tồn tại 2 điểm sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại 2 điểm đó vuông góc nhau.

c) Muốn thỏa mãn yêu cầu của đầu bài thì phải tồn tại ít nhất một giá trị x_0 sao cho $y'(x_0)k = -1$ ($k \neq 0$)

$$\text{hay là } (3x_0^2 + 2x_0 + 1)k = -1 \quad (k \neq 0)$$

$$\text{hay là } 3kx_0^2 + 2kx_0 + (k+1) = 0 \quad (k \neq 0)$$

Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta' = k^2 - 3k(k+1) \geq 0$$

hay $2k^2 + 3k \leq 0$, tức là $-\frac{3}{2} \leq k \leq 0$; vì $k \neq 0$ nên những giá trị k thỏa mãn yêu cầu của bài toán là:

$$-\frac{3}{2} \leq k < 0$$

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Chứng minh rằng trên đồ thị của hàm số có vô số các cặp điểm sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại các cặp điểm đó song song với nhau. Đồng thời chứng minh rằng các đoạn thẳng nối các cặp điểm ấy luôn đồng quy tại một điểm.

Giải: Cách 1. Muốn chứng minh trên đồ thị có vô số cặp điểm mà tại các cặp điểm ấy tiếp tuyến với đồ thị song song với nhau, ta sẽ chứng minh có vô số các cặp điểm mà tại các cặp điểm đó đạo hàm bậc nhất của hàm số bằng nhau (ý nghĩa hình học của đạo hàm bậc nhất). Như vậy ta chỉ cần chứng minh phương trình:

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} = k \text{ có 2 nghiệm phân biệt với mọi } k < 0.$$

Viết lại phương trình trên dưới dạng $kx^2 - 2kx + (k+2) = 0$.
(*)

Biệt số $\Delta = -2k > 0$ với mọi $k < 0$. Vậy phương trình trên luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi $k < 0$ (hiển nhiên rằng nghiệm đó khác 1).

Vì có vô số giá trị $k < 0$, nên có vô số cặp điểm thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Ta sẽ chứng minh rằng các cặp điểm tìm được ở trên đối xứng nhau qua tâm đối xứng $I(1,1)$ của đồ thị. Muốn thế, ta chỉ cần chứng minh toạ độ điểm giữa đoạn thẳng nối cặp điểm đó là $(1, 1)$. Thật vậy, hoành độ của các cặp điểm tìm được ở trên chính là nghiệm của phương trình (*). Từ đó, theo định lý Viét, hoành độ điểm giữa đoạn thẳng nối các cặp điểm đó là:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2k}{2k} = 1.$$

Tung độ điểm giữa của đoạn thẳng nối các cặp điểm đó là:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{y(x_1) + y(x_2)}{2} = \frac{\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} + \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}}{2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = \frac{\frac{k+2}{k} - 1}{\frac{k+2}{k} - 2 + 1} = 1. \end{aligned}$$

Như vậy, các cặp điểm tìm được ở trên đối xứng nhau qua tâm đối xứng của đồ thị, và như vậy hiển nhiên các đoạn thẳng nối các cặp điểm đó luôn luôn đi qua điểm cố định $(1, 1)$, tức là đồng quy tại điểm đó.

Cách 2. Chúng ta chứng minh rằng các cặp điểm đối xứng nhau qua tâm đối xứng $I(1, 1)$ có tiếp tuyến tại đó song song nhau là đủ.

Lấy 2 điểm bất kỳ trên đồ thị đối xứng nhau qua $I(1, 1)$ có hoành độ x_1, x_2 . Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{2} &= 1 \text{ hay } x_2 = 2 - x_1 \\ y'(x_2) &= \frac{-2}{(x_2 - 1)^2} = \frac{-2}{|(2 - x_1) - 1|^2} = \frac{-2}{(1 - x_1)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-2}{(x_1 - 1)^2} = y'(x_1).$$

Vậy tiếp tuyến tại cặp điểm đó song song với nhau. Vì $I(1, 1)$ là tâm đối xứng của đồ thị nên có vô số cặp điểm như vậy và hiển nhiên đoạn thẳng nối các cặp điểm ấy đi qua điểm $I(1, 1)$.

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = x^3 - x - 6$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại điểm $U(0, -6)$. Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến khác của đồ thị đều không đi qua điểm ấy.

b) Trong mọi tiếp tuyến với đồ thị, hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

2. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$

a) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại điểm có hoành độ $x_0 \neq 0$. Giả sử tiếp tuyến đó tiếp xúc với đồ thị tại điểm M và, cắt trục tung tại điểm A , cắt đường thẳng $y = x + 1$ tại B . Chứng minh rằng M là điểm giữa của đoạn AB .

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với trục tung. Hãy tính diện tích ΔIAB . Từ đó hãy suy ra tích $IA \cdot IB$ luôn luôn không đổi khi tiếp tuyến thay đổi.

3. Cho hàm số $y = \frac{3x + 2}{x + 2}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị, biết tiếp tuyến đi qua điểm $(4, 3)$.

4. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

a) Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của đồ thị đều không đi qua điểm $I(1, 1)$.

b) Chứng minh rằng trên đồ thị của hàm số tồn tại vô số các cặp điểm sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại các cặp điểm đó

song song với nhau. Đồng thời chứng minh rằng đoạn thẳng nối các cặp điểm đó luôn đi qua một điểm cố định.

c) Chứng minh rằng trên đồ thị hàm số có 2 điểm, sao cho tiếp tuyến với đồ thị tại hai điểm đó vuông góc với đường thẳng $y = x$.

5. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{2x-1}$.

a) Giả sử đồ thị cắt trục tung, trục hoành tại A và B. Hãy viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị, sao cho tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng AB.

b) Tìm trên trục hoành tất cả những điểm mà từ đó có thể kẻ được ít nhất một tiếp tuyến tới đồ thị.

6. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $y = \frac{x+2}{x-2}$, biết rằng tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$.

7. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y = 4x^3 - 3x$, biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm (3, 99).

8. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

Chứng minh rằng: qua điểm (0, 2) ta có thể kẻ được ba tiếp tuyến tới đồ thị. Viết phương trình các tiếp tuyến đó.

9. Chứng minh rằng trong tất cả các tiếp tuyến đó của đồ thị của hàm số $y = mx^2 - 2(m-1)x + m - 3$, có một tiếp tuyến cố định (không phụ thuộc m).

10. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$, biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = -2x + 1$.

§4. Quỹ tích đại số

Quỹ tích những điểm có tính chất (A) là tập hợp các điểm cùng có tính chất ấy.

Có hai dạng bài toán quỹ tích.

a) Quỹ tích dạng xác định là quỹ tích của một điểm phụ thuộc vào tham số. Khi giá trị tham số thay đổi vị trí điểm đó cũng thay đổi theo, kết quả chúng ta được quỹ tích là một tập hợp các điểm đó ứng với mọi giá trị m thích hợp.

Muốn tìm quỹ tích của điểm $M(x, y)$ thoả mãn tính chất (A) nào đó (phụ thuộc tham số m) ta làm như sau:

* Biểu diễn tọa độ của điểm $M(x, y)$ theo m :

$$\begin{cases} x = F(m) \\ y = H(m). \end{cases} \quad (*)$$

* Từ hệ này ta khử m sẽ được $y = Q(x)$. Đó chính là phương trình quỹ tích cần tìm.

* Hạn chế quỹ tích (nếu cần): nếu m thay đổi tùy ý thì quỹ tích là toàn bộ đường $y = Q(x)$ (khi đó không cần hạn chế quỹ tích). Nếu m thay đổi nhưng bị hạn chế bởi ràng buộc nào đó thì tọa độ điểm $M(x, y)$ cũng bị những ràng buộc tương ứng hạn chế. Trong trường hợp này, quỹ tích chỉ là một phần nào đó của $y = Q(x)$.

Đối với quỹ tích dạng xác định, chúng ta nên chú ý chia thành hai trường hợp sau đây (trong nhiều trường hợp sẽ thuận tiện hơn).

i) Nếu điểm cần tìm quỹ tích nằm trên đồ thị của hàm số đã cho thì chỉ cần tìm biểu thức của hoành độ điểm ấy:

$$x = F(m).$$

Từ đây biểu diễn m qua x : $m = N(x)$ rồi thay vào vị trí m trong biểu thức hàm số đã cho sẽ được phương trình quỹ tích $y = Q(x)$.

ii) Nếu điểm cần tìm quỹ tích không nằm trên đồ thị của hàm số đã cho thì bắt buộc phải tìm biểu diễn cả tung độ và hoành độ của $M(x, y)$ qua m như (*) rồi từ đó khử m để dẫn tới phương trình quỹ tích $y = Q(x)$.

Ví dụ 1. Cho họ parabol $y = x^2 - mx + m$. Hãy tìm quỹ tích đỉnh của parabol khi m thay đổi.

$$\text{Cách 1. Tọa độ đỉnh parabol là } \begin{cases} x = \frac{m}{2} & (1) \\ y = \frac{-m^2 + 4m}{4} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $m = 2x$. Thế giá trị m vào (2) ta được:

$$y = \frac{-(2x)^2 + 4(2x)}{4} = -x^2 + 2x.$$

Vậy khi m thay đổi (không có ràng buộc nào với m) quỹ tích đỉnh parabol là đường parabol $y = -x^2 + 2x$.

Cách 2. Nhận xét rằng đỉnh parabol là điểm nằm trên nó, chỉ cần tìm hoành độ đỉnh $x = \frac{m}{2}$. Từ đây $m = 2x$. Thay vào vị trí của m trong biểu thức hàm số, ta được $y = x^2 - (2x)x + 2x = -x^2 + 2x$. Đây là phương trình quỹ tích cần tìm.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x - 2 + \frac{m}{x}$.

a) Với những giá trị nào của m thì hàm số có cực đại và cực tiểu?

b) Hãy tìm quỹ tích điểm cực đại và quỹ tích điểm cực tiểu khi m thay đổi.

c) Tìm trên mặt phẳng tọa độ tất cả các điểm sao cho mỗi một trong số các điểm đó là điểm cực đại của đồ thị ứng với một giá trị nào đó của m đồng thời điểm đó cũng là điểm cực tiểu của đồ thị ứng với một giá trị khác nào đó của m .

$$\text{Giải: a) Ta có } y' = 1 - \frac{m}{x^2} = \frac{x^2 - m}{x^2}$$

Muốn hàm số có cực đại và cực tiểu thì y' phải có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu hai lần. Tức là phương trình $x^2 - m = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt. Điều này tương đương với $m > 0$.

b) Giả sử $m > 0$. Lúc đó $y' = 0$ khi $x = \pm\sqrt{m}$. Ta có bảng biến thiên sau đây:

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$	0	$\sqrt{m}$	∞	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty \nearrow$ M $\searrow -\infty$			$+\infty \searrow$ m $\nearrow +\infty$		

Bảng 3

i) Quĩ tích điểm cực đại: ta có hoành độ điểm cực đại $x = -\sqrt{m} < 0$.

Từ đây suy ra $m = x^2$. Thay vào hàm số được

$$y = x - 2 + \frac{x^2}{2} = 2x - 2, x < 0.$$

Vậy quĩ tích điểm cực đại khi m thay đổi là nửa đường thẳng $y = 2x - 2, x < 0$.

ii) Quĩ tích điểm cực tiểu: Hoành độ điểm cực tiểu

$$x = \sqrt{m} > 0.$$

Tương tự như i) ta được quĩ tích điểm cực tiểu khi m thay đổi là nửa đường thẳng $y = 2x - 2, x > 0$.

c) Điểm cần tìm thuộc đồng thời hai quĩ tích ở trên, vì vậy nó chính là giao điểm của hai quĩ tích. Song chú ý rằng hai quĩ tích đó không có điểm chung. Vậy không tồn tại điểm thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{mx + 2}{x + m - 1}$.

a) Tìm quĩ tích của tâm đối xứng của đồ thị hàm số khi m thay đổi.

b) Tìm tất cả các đường thẳng (cố định) trên mặt phẳng tọa độ mà đồ thị của hàm số không bao giờ cắt đường thẳng đó dù m lấy bất cứ giá trị nào.

Giải: a) Trước hết ta tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số

* Tiệm cận ngang: $y = b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx + 2}{x + m - 1} = m.$

* Tiệm cận đứng: $x = a$ với $\lim_{x \rightarrow a} \frac{mx + 2}{x + m - 1} = \infty$ suy ra $x = -m + 1$.

Giao điểm của 2 tiệm cận là điểm $I(-m + 1, m)$. Dễ dàng chứng minh được I là tâm đối xứng của đồ thị (bạn đọc tự chứng minh). Cần tìm quỹ tích điểm khi m thay đổi. Lưu ý rằng điểm I không nằm trên đồ thị của hàm số đã cho. Ta có:

$$\begin{cases} x = -m + 1 \\ y = m \end{cases} \quad (1)$$

Từ (1) có $m = 1 - x$, thay vào (2) được $y = 1 - x$. Vậy quỹ tích của tâm đối xứng khi m thay đổi là đường thẳng $y = 1 - x$.

b) *Cách 1.* Giả sử $y = ax + b$ là đường thẳng không cắt đồ thị đã cho $\forall m$. Khi đó phương trình:

$$\frac{mx + 2}{x + m - 1} = ax + b \quad (a \neq 0)$$

vô nghiệm với mọi m . Biến đổi phương trình về dạng:

$$ax^2 + (am - a + b - m)x + (bm - b - 2) = 0 \quad (1)$$

hoặc vô nghiệm với mọi m , hoặc chỉ có 1 nghiệm kép $x = -m + 1$.

i) Nếu phương trình chỉ có 1 nghiệm kép $x = -m + 1$ ta có:

$$-m + 1 = -\frac{am - a + b - m}{2a} \quad (\forall m) \text{ suy ra } (a + 1)m - (a + b) = 0$$

$(\forall m)$. Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} a + 1 = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \text{ suy ra } a = -1, b = 1 \quad (*)$$

Mặt khác điều kiện để phương trình trên có nghiệm kép với mọi m là $\Delta = (am - a + b - m)^2 - 4a(bm - b - 2) = 0 \quad (\forall m)$ hay là $(a - 1)^2 m^2 - 2(a^2 - a + ab + b)m + (a + b)^2 + 8a = 0 \quad (\forall m)$, điều này tương đương với:

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ a^2 - a + ab + b = 0 \\ (a + b)^2 + 8a = 0. \end{cases} \text{ Hệ này vô nghiệm.}$$

Điều này mâu thuẫn với (*). Vậy phương trình (1) không thể có nghiệm kép ($\forall m$).

ii) Nếu phương trình (1) vô nghiệm $\forall m$.

Hay $\Delta = (a - 1)^2 m^2 - 2(a^2 - a + ab + b)m + (a + b)^2 + 8a < 0$ ($\forall m$) nhận xét rằng với $a \neq 1$ biểu thức Δ là một tam thức bậc hai có hệ số cao nhất là $(a - 1)^2 > 0$ nên Δ không thể luôn < 0 với mọi m . Vậy phương trình (1) không thể vô nghiệm $\forall m$.

Tóm lại không tồn tại đường thẳng thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Cách 2. Giả sử $y = ax + b$ là đường thẳng không cắt đồ thị đã cho $\forall m$, khi đó phương trình $\frac{mx + 2}{x + m - 1} = ax + b$ (1) ($a \neq 0$) vô nghiệm với mọi m . Viết lại phương trình dưới dạng $(ax + b - x)m + (ax + b)(x - 1) - 2 = 0$. Nó vô nghiệm $\forall m$ điều này tương đương với:

$$ax + b - x = 0 \quad (2)$$

$$(ax + b)(x - 1) - 2 \neq 0 \quad (3)$$

Từ (2) suy ra $x = ax + b$. Thay vào (3): $x^2 - x - 2 \neq 0$. (4). Mặt khác thay $x = ax + b$ vào (1) ta được $(mx + 2)/(x + m - 1) = x$ hay là $x^2 - x - 2 = 0$. Điều này mâu thuẫn với (4). Vậy không thể có đường thẳng không cắt đồ thị với mọi m .

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.

Chứng minh rằng, với mọi m , đường thẳng $y = mx - m + 1$ luôn cắt đồ thị tại 1 điểm I cố định. Xác định m để đường thẳng cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt I, M, N. Trong trường hợp đó, tìm quỹ tích điểm giữa MN khi m thay đổi.

Giải: Cách 1. Để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị đã cho, phương trình $x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = mx - m + 1$ phải có nghiệm. Viết lại phương trình dưới dạng

$$(x - 1)(x^2 - 2x + 2 - m) = 0.$$

Phương trình này luôn có một nghiệm $x = 1$ với mọi m : với $x = 1$ ta có $y = 1$. Vậy đường thẳng luôn cắt đồ thị tại một điểm cố định $I(1,1)$.

Để đường thẳng cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt, phương trình $x^2 - 2x + 2 - m = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = 1 - (2 - m) > 0 \\ 1 - m \neq 0 \end{cases} \quad \text{hay } m > 1$$

Với điều kiện đó ta được

$$x_M = 1 + \sqrt{m - 1}, x_N = 1 - \sqrt{m - 1}.$$

Từ đó tính được

$$y_M = m(1 + \sqrt{m - 1}) - m + 1 = m\sqrt{m - 1} + 1,$$

$$y_N = m(1 - \sqrt{m - 1}) - m + 1 = -m\sqrt{m - 1} + 1.$$

Gọi điểm giữa đoạn MN là $A(x_A, y_A)$, ta có

$$x_A = \frac{x_M + x_N}{2} = 1,$$

$$y_A = \frac{y_M + y_N}{2} = 1.$$

Điểm A chính là điểm $I(1,1)$ đã xét.

Vậy quỹ tích điểm giữa đoạn MN là điểm cố định $I(1,1)$.

Cách 2. Đường thẳng $y = mx - m + 1$ mà có điểm cố định suy ra phương trình $y - mx + m - 1 = 0$ thỏa mãn với mọi m hay là $(1 - x)m + (y - 1) = 0$ ($\forall m$).

Điều này tương đương với $\begin{cases} 1 - x = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$ hay là $x = 1, y = 1 \Rightarrow I(1,1)$

là điểm cố định của họ đường thẳng $y = mx - m + 1$.

Kiểm tra trực tiếp thấy rằng (1,1) thỏa mãn phương trình đường cong đã cho. Vậy I(1,1) là giao điểm cố định của đường thẳng $y = mx - m + 1$ với đồ thị đã cho.

Thấy rằng điểm I(1,1) chính là tâm đối xứng của đồ thị (bạn đọc tự kiểm tra). Do đó trong trường hợp đường thẳng cắt đồ thị tại 3 điểm (trong đó chắc chắn có một giao điểm là I(1,1)) thì hai giao điểm kia phải đối xứng qua I, tức là I là điểm giữa của đoạn MN với mọi $m > 1$ (điều kiện này cũng được nhận như đã trình bày ở cách 1). Vậy khi m thay đổi và lớn hơn 1, quỹ tích điểm giữa đoạn MN là điểm I(1,1).

Vi dụ 5. Cho parabol $y = x^2$.

Với những giá trị nào của m thì đường thẳng $y = mx - m$ cắt parabol tại hai điểm phân biệt A và B. Trong trường hợp đó, hãy tìm quỹ tích điểm giữa I của đoạn AB.

Giải: Để đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt thì phương trình $x^2 = mx - m$ phải có hai nghiệm phân biệt; tức là $x^2 - mx + m = 0$ (1) phải có hai nghiệm phân biệt.

Như vậy ta phải có: $\Delta = m^2 - 4m > 0$

hay là: $m < 0$ hoặc $m > 4$. (2)

Giả sử điều kiện (2) được thỏa mãn. Khi đó đường thẳng $y = mx - m$ cắt parabol tại hai điểm A(x_1, y_1) và B(x_2, y_2) trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1).

Vậy tọa độ của điểm giữa I là:

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m}{2}, \\ y = mx - m. \end{cases}$$

Khử m từ hệ này, ta được $y = 2x^2 - 2x$.

Hạn chế quỹ tích: Từ điều kiện (2) ta nhận được

$$m = 2x < 0 \text{ suy ra } x < 0,$$

$$m = 2x > 4 \text{ suy ra } x > 2.$$

Vậy: Quĩ tích điểm giữa I của đoạn AB là:

$$y = 2x^2 - 2x \text{ với } x < 0 \text{ và } x > 2.$$

Ví dụ 6. Tìm quĩ tích các giao điểm của đồ thị

$$y = \frac{x^2 + (2m-1)x + m^2 + m + 1}{x^2 + m^2 - m + 1}$$

với các trục tọa độ.

Giải: Trước hết, ta xác định giao điểm của đồ thị với trục tung:

$$x = 0; y_0 = \frac{m^2 + m + 1}{m^2 - m + 1}.$$

Nếu đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0, y_0)$ thì phương trình:

$$y_0 = \frac{m^2 + m + 1}{m^2 - m + 1} \text{ phải có nghiệm.}$$

hay phương trình: $(y_0 - 1)m^2 - (y_0 + 1)m + y_0 - 1 = 0$ phải có nghiệm.

Rõ ràng khi $y_0 = 1$ thì phương trình có nghiệm $m = 0$. Khi $y_0 \neq 1$ thì phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\Delta = (y_0 + 1)^2 - 4(y_0 - 1)^2 \geq 0$$

hay là $\frac{1}{3} \leq y_0 \leq 3 \text{ (} y_0 \neq 1 \text{)}.$

Kết hợp với trên ta được $\frac{1}{3} \leq y \leq 3.$

Vậy quĩ tích giao điểm của đồ thị với trục tung là đoạn thẳng:

$$\{x = 0; \frac{1}{3} \leq y \leq 3\}.$$

Tiếp theo, ta xác định các giao điểm của đồ thị với trục hoành:

$$y = 0, x^2 + (2m-1)x + m^2 + m + 1 = 0$$

Nếu đồ thị cắt trục hoành tại điểm $B(x_0, 0)$ thì phương trình

$x_0^2 + (2m-1)x_0 + m^2 + m + 1 = 0$, phải có nghiệm, hay là phương trình $m^2 + (2x_0 + 1)m + x_0^2 - x_0 + 1 = 0$ phải có nghiệm.

$$\text{Vậy } \Delta = (2x_0 + 1)^2 - (4x_0^2 - x_0 + 1) \geq 0$$

$$\text{hay là: } 8x_0 - 3 \geq 0, \text{ hay là } x_0 \geq \frac{3}{8}.$$

Vậy quỹ tích giao điểm của đồ thị với trục hoành là những điểm trên trục hoành có tọa độ thỏa mãn:

$$\left\{ y = 0; x \geq \frac{3}{8} \right\}.$$

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = x^2 - 2mx + 2m - 1$.

a) Với những giá trị nào của m , thì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A và B ?

b) Gọi C là giao điểm của đồ thị với trục tung. Tìm quỹ tích trọng tâm của ΔABC khi m thay đổi.

Giải: a) Để đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt, thì phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ (1) phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Tức là phải có } \Delta' = x^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 > 0,$$

$$\text{hay là } m \neq 1. \quad (2)$$

b) Giả sử điều kiện (2) được thỏa mãn. Khi đó đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1). Giao điểm của đồ thị với trục tung là $C(0, 2m - 1)$.

Vậy tọa độ của trọng tâm G của ΔABC là:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) = \frac{x_1 + x_2}{3}, \\ y = \frac{1}{3} (2m - 1) \end{cases}$$

$$\text{hay là } \begin{cases} x = \frac{2m}{3}, \\ y = \frac{2m - 1}{3}. \end{cases}$$

$$\text{Khử } m \text{ từ hệ này ta được: } y = x - \frac{1}{3}.$$

Giới hạn quỹ tích: Do $m = \frac{3x}{2} \neq 1$ nên $x \neq \frac{2}{3}$.

Vậy quỹ tích trọng tâm G của ΔABC là đường thẳng:

$$y = x - \frac{1}{3} \text{ với } x \neq \frac{2}{3}.$$

b) Quỹ tích dạng không xác định

Ngoài các bài toán về quỹ tích dạng xác định (loại quỹ tích của một điểm phụ thuộc tham số), có rất nhiều bài toán liên quan đến quỹ tích hình học trên mặt phẳng tọa độ mà ta không thể xác định trước các tọa độ của điểm cần thiết (bằng phương pháp đại số).

Vì vậy, ở đây cần kết hợp cả hai tính chất hình học và đại số của quỹ tích các điểm đã cho để giải.

Ví dụ 8. Cho parabol $y = x^2$.

a) Tìm quỹ tích tất cả những điểm mà từ đó ta có thể kẻ được đúng hai tiếp tuyến tới parabol đã cho.

b) Tìm quỹ tích tất cả những điểm mà từ đó ta có thể kẻ được hai tiếp tuyến với parabol và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Giải: a) Giả sử từ điểm $A(x_0, y_0)$ ta kẻ được đúng hai tiếp tuyến tới parabol $y = x^2$.

Phương trình của đường thẳng đi qua A và có hệ số góc bằng k là: $y = k(x - x_0) + y_0$.

Giả sử đường thẳng này là tiếp tuyến với parabol, khi đó phương trình $x^2 = k(x - x_0) + y_0$, hay phương trình $x^2 - kx + kx_0 - y_0 = 0$ phải có nghiệm kép, tức là:

$$\Delta = k^2 - 4x_0k + 4y_0 = 0.$$

Theo giả thiết thì phương trình này có hai nghiệm k_1, k_2 .

Vậy ta phải có: $\delta' = 4x_0^2 - 4y_0 > 0$ hay là: $y_0 < x_0^2$.

Vậy quỹ tích các điểm (x, y) mà từ đó ta có thể kẻ được đúng hai tiếp tuyến tới parabol là tập hợp các điểm thỏa mãn điều kiện $y < x^2$.

Chú ý: Trên mặt phẳng tọa độ, quỹ tích những điểm vừa tìm được ở trên là tập hợp tất cả những điểm nằm “phía ngoài” parabol $y = x^2$.

Với lý luận tương tự, bạn đọc hãy chỉ ra:

* Quỹ tích những điểm mà từ đó ta có thể kẻ được đúng một tiếp tuyến với parabol $y = x^2$.

* Quỹ tích những điểm mà từ đó ta không thể kẻ được một tiếp tuyến nào tới parabol $y = x^2$.

b) Giả sử rằng từ điểm $A(x_0, y_0)$ ta có thể kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Lý luận tương tự như câu a) ta đi đến kết luận: Phương trình $\Delta = k^2 - 4x_0k + 4y_0 = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt k_1, k_2 đồng thời: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Từ là ta phải có $k_1 \cdot k_2 = 4y_0 = -1$,

hay là: $y_0 = -\frac{1}{4}$.

Vậy, quỹ tích những điểm mà từ đó ta có thể kẻ được hai tiếp tuyến tới parabol và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau là đường thẳng:

$$y = -\frac{1}{4}$$

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$. Tìm quỹ tích tất cả những điểm trên trục hoành sao cho từ đó ta có thể kẻ được đúng một tiếp tuyến tới đồ thị của hàm số.

Giải: Các điểm trên trục hoành có dạng $A(x_0, 0)$.

Giả sử từ $A(x_0, 0)$ ta kẻ được đúng một tiếp tuyến tới đồ thị của hàm số.

Đường thẳng đi qua A và hệ số góc bằng k có phương trình là: $y = kx - kx_0$.

Để đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị, thì phương trình $\frac{x^2 - 4}{x + 1} = kx - kx_0$ phải có nghiệm kép, hay là $(1 - k)x^2 + k(x_0 - 1) + (kx_0 - 4) = 0$ phải có nghiệm kép.

Như vậy ta phải có:

$$\begin{cases} k \neq 1 \\ \Delta = (x_0 + 1)^2 k^2 - 4(x_0 + 4)k + 16 = 0. (*) \end{cases}$$

Theo giả thiết thì phương trình (*) phải có đúng một nghiệm $k \neq 1$.

Ta xét các trường hợp sau:

1) Nếu $x_0 = -1$. Lúc đó phương trình (*) có một nghiệm $k = \frac{4}{3}$.

2) Nếu $x_0 \neq -1$: Lúc đó phương trình (*) có đúng một nghiệm khác 1 nếu: Phương trình (*) có nghiệm kép khác 1 hoặc phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt nhưng một nghiệm bằng 1.

Phương trình (*) có biệt số $\Delta' = -12x_0^2 + 48$.

$\Delta' = 0$, lúc đó $x_0 = \pm 2$. Trong trường hợp này (*) có nghiệm kép và dễ thấy nghiệm đó khác 1.

Ta nhận thấy (*) có nghiệm bằng 1, khi $x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0$, là khi $x_0 = 1$. Lúc đó $\Delta' = 36 > 0$. Vậy khi $x_0 = 1$, phương trình (*) cũng có đúng một nghiệm khác 1.

Tóm lại, trên trục hoành có bốn điểm:

A(-2, 0); B(-1, 0); C(1, 0); D(2, 0)

mà từ đó ta kẻ được đúng một tiếp tuyến tới đồ thị đã cho.

BÀI TẬP

1. Cho họ parabol $y = x^2 - (4m + 1)x + m^2 - 1$. Tìm quỹ tích đỉnh của họ parabol khi m thay đổi.

2. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x + m}$.

Với giá trị nào của m hàm số có cực tiểu. Tìm quỹ tích của điểm cực tiểu của hàm số khi m thay đổi.

3. a) Xác định tất cả các parabol $y = ax^2 + bx + c$, tiếp xúc với đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm $(1, 3)$.

b) Tìm quỹ tích của các parabol đó.

c) Tìm trên mặt phẳng tọa độ tất cả những điểm không nằm trên bất kỳ một parabol nào nói trong phần a).

4. Cho parabol $y = x^2$.

a) Chứng minh rằng với mọi m , đường thẳng $y = mx + 1$ luôn luôn cắt parabol tại hai điểm phân biệt A và B . Tìm quỹ tích điểm giữa đoạn AB khi m thay đổi.

b) Chứng minh rằng $OA \perp OB$ với mọi m (O là gốc tọa độ).

5. Cho hàm số $y = x + 1 + \frac{m}{x-1}$.

a) Với những giá trị nào của m , thì hàm số có cực đại, cực tiểu? Tìm quỹ tích điểm cực đại của đồ thị khi m thay đổi.

6. Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$.

a) Khi m thay đổi, tìm quỹ tích điểm uốn của đồ thị hàm số.

b) Với $m = 3$. Chứng minh rằng với mọi k , đường thẳng $y = kx + k + 1$ luôn luôn cắt đồ thị đã vẽ tại một điểm I cố định.

c) Với $m = 3$. Xác định k sao cho đường thẳng đó cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt I, M, N . Trong trường hợp đó, tìm quỹ tích điểm giữa đoạn MN khi đường thẳng quay xung quanh I .

7. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$.

a) Chứng minh rằng với mọi x , hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu. Tìm quỹ tích điểm cực đại của đồ thị khi m thay đổi.

b) Khi m thay đổi, hãy tìm quỹ tích điểm giữa đoạn thẳng nối điểm cực đại và điểm cực tiểu.

8. Cho hàm số $y = x + m + \frac{1}{mx-1}$ ($m \neq 0$).

a) Với những giá trị nào của m , thì hàm số có cực đại và cực tiểu?

b) Tìm quỹ tích điểm cực đại và quỹ tích điểm cực tiểu của đồ thị hàm số, khi m thay đổi.

9. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + m(m^2 - 1)x - m^4 + 1}{x - m}$.

a) Chứng minh rằng với mọi m , hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu.

b) Khi m thay đổi, tìm quỹ tích điểm cực đại và tìm quỹ tích điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

c) Chứng minh rằng trên mặt phẳng tọa độ có duy nhất một điểm cực đại của đồ thị ứng với một giá trị nào đó của m và đồng thời điểm đó, cũng là điểm cực tiểu của đồ thị ứng với một giá trị khác nào đó của m .

10. Cũng vẫn những câu hỏi như bài 9 đối với hàm số:

$$y = (x - m)^3 - 3x + m^2.$$

11. Cho hàm số $y = x^3 + m(x^2 - 1)$.

a) Chứng minh rằng với mọi m đồ thị của hàm số luôn đi qua hai điểm cố định.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị qua hai điểm cố định đó.

c) Tìm quỹ tích giao điểm của hai tiếp tuyến (ở câu b), khi m thay đổi.

12. Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$.

Chứng minh rằng với mọi k , parabol $y = kx^2 - 8$ luôn luôn cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt, trong đó có một điểm nằm trên trục tung. Gọi hai giao điểm còn lại là B và C. Tìm quỹ tích điểm giữa đoạn BC khi k thay đổi.

13. Cho hai hàm số: $y = x^3 + x^2 + 5$ và $y = x^3 + 2x^2 + mx + 1$.

a) Chứng minh rằng với mọi m đồ thị của hai hàm số trên luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B.

b) Tìm quỹ tích điểm giữa đoạn AB khi m thay đổi.

14*. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.

Tìm quỹ tích tất cả những điểm mà từ đó ta có thể kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

15*. Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$.

a) Tìm quỹ tích tất cả những điểm mà từ đó ta có thể kẻ được ít nhất một tiếp tuyến tới parabol.

b) Tìm quỹ tích tất cả những điểm mà từ đó ta có thể kẻ được hai tiếp tuyến tới parabol và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP

CHƯƠNG II

1. a) Hai điểm cố định là $(0, 0) : (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$.

b) Hai điểm đó là $(0, 1) : (-\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$

2. Tiệm cận đứng $x = 1$ cố định. Tiệm cận xiên $y = \frac{m+1}{m}(x-2)$ luôn đi qua điểm $(2, 0)$ cố định.

3. Đồ thị đi qua hai điểm cố định $(0, -1), (3, -1)$ với $m \neq 0$ và $m \neq -6$.

4. Đồ thị đi qua hai điểm cố định là $(1, -3)$ và $(-3, 13)$.

5. Nếu $\alpha, \beta = -1/4$ thì đồ thị có một điểm cố định duy nhất $(1/2\beta, 1/2\beta)$.

6. b) $x_0 = 1$ (Tìm điểm x_0 mà tại đó y không phụ thuộc vào m).

8. a) Tiệm cận xiên đi qua điểm cố định $(-1, -2)$.

b) Đồ thị không thể đi qua các điểm thuộc các đường thẳng:

1) Toàn bộ đường thẳng $x = 1$;

2) Đường thẳng $x = -\sqrt{10}$ (trừ ra 1 điểm);

3) Đường thẳng $x = \sqrt{10}$ (trừ ra 1 điểm).

9. Phương trình $I = x_0^4 - 2mx_0^2 + m^2 + 1$ phải có một nghiệm duy nhất (phương trình với ẩn số là m). Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

10. Đồ thị hàm số đi qua điểm cố định $(2, 0)$ nằm trên trục hoành. Từ đó $y = (x-2)(Ax^2 + Bx + C)$.

Ta cần tìm điều kiện để phương trình $\lambda x^2 + Bx + C = 0$ có hai nghiệm lớn hơn 1 và khác 2.

11. a) α phải thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \beta = \sqrt{2}$

b) Điểm (x, y) phải thỏa mãn $y^2 \leq x^2 + 1$

12. Tiệm cận xiên thông qua những điểm có tọa độ (x, y) mà $y > x^2/4 + 1$.

13.a) Chứng minh phương trình $\frac{m - (m^2 + m - 1)(m^2 - m + 2)}{1 - m} = 1$ vô nghiệm.

b) Chứng minh phương trình $y_0 = \frac{mx_0^2 - (m^2 + m - 1)x_0 + (m^2 - m + 2)}{x_0 - m}$

luôn có hai nghiệm với $x_0 \geq 1$

15. Trên trục tung, những điểm có tọa độ

$\{x = 0, -\frac{8}{9} < y < 0\}$ đồ thị hàm số không đi qua với mọi m .

16. Họ đường thẳng luôn đi qua điểm cố định $(1, 1)$, chú ý rằng hệ số góc của đường thẳng là $k = \frac{m+1}{m^2+m+1}$ thỏa mãn điều kiện $-\frac{1}{3} \leq k \leq 1$ với mọi m .

Từ đó suy ra tất cả những điểm mà họ đường cong không thể đi qua.

17. Chứng minh rằng phương trình $y_0 = \frac{x_0^2 - mx_0 - m^2}{x_0 + m}$ luôn có hai nghiệm với mọi y_0 và $x_0 \neq 0$

§2.

1. a) Cùng đi qua điểm cố định $(0, -2)$; b) $m = -1$.

2. với $m = -3$ thì đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = 5$. Lúc đó điểm tiếp xúc là điểm cực đại.

3. $a = \pm 2$, $b = 0$.

4. Tiệm cận xiên luôn tiếp xúc với parabol $y = x^2/4 + 1$.

5. Đồ thị hàm số luôn đi qua hai điểm cố định, trong đó có một điểm $(3, 0)$ nằm trên trục hoành (điểm còn lại là $(-1, -8)$). Từ đó có thể viết lại hàm số dưới dạng: $y = (x - 3)(x^2 + mx + m + 1)$

Từ đó suy ra a) $m = 2 + 2\sqrt{2}$; $m = -\frac{5}{3}$

b) $-1 < m < 2 - 2\sqrt{2}$

6. Đồ thị luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x - 1$ tại $A(-1, -2)$.

7. a) Đồ thị luôn tiếp xúc với nhau tại điểm $(0, -1)$ với mọi $m \neq 0$

8. a) $m = -1$.

9. Đồ thị luôn tiếp xúc với parabol $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$. Những điểm nằm phía trong parabol tìm được.

10. $a = 1, b = 2$.

11. Trước hết, phương trình $\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1} = -x + m$ phải có hai nghiệm phân biệt, tức là phương trình $2x^2 - (4 + m)x + 1 + m = 0(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt. Phương trình này có $\Delta = 8 + m^2 > 0$, do đó luôn có hai nghiệm.

Giả sử hai giao điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ khi đó, gọi các nghiệm của $(*)$ là x_1, x_2 . Ta phải có $\frac{x_1 + x_2}{m^2} = \frac{m}{2}$ (đường thẳng $y = x$ và

$y = -x + m$ cắt nhau tại điểm có hoành độ $x = \frac{m^2}{2}$. Như vậy phải có $\frac{4+m}{4} = \frac{m}{2}$.

Suy ra $m = 4$.

12. $m = -\frac{9}{8}$.

13. a) Từ giả thiết $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ suy ra phương trình $ax^2 + bx + c = 2ax + b$ có nghiệm.

b) Hãy tìm điều kiện cần và đủ để phương trình $ax^2 + bx + c = 2ax + b$ có nghiệm.

14. Đồ thị chỉ có một đường thẳng cố định duy nhất khi $p = 0$ hoặc $p = -4$.

Đồ thị chỉ tiếp xúc với một đường thẳng cố định ($y = x$) khi $p = 0$ hoặc $p = -4$.

15. Hàm số $y = \frac{x^{2m+2}}{2n+2} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^2}{2} + a$ có giá trị nhỏ nhất bằng a (đạt được khi $x = 0$). Vậy $a > 0$ phương trình vô nghiệm, $a = 0$ phương trình có nghiệm kép, $a < 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

16. $m \geq 0$.

17. Khảo sát hàm số $y = 3x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 1$. Theo bảng biến thiên của hàm số, ta thấy phương trình có hai nghiệm x_1 ($x_1 < 0$) và x_2 ($0 < x_2 < 1$).

Ta có $y(-0,3) = 0,10$; $y(-0,2) = -0,55$, do đó

$$-0,3 < x_1 < -0,2$$

Ta lại có $y(0,4) = -0,12$; $y(0,5) = 0,18$, do đó

$$0,4 < x_2 < 0,5$$

§3.

1. Hoàn toàn tương tự như ví dụ 1.

2. a) Phương trình tiếp tuyến tại điểm có tọa độ $x_0 \neq 0$ là

$$y = \left(\frac{x_0^2 - 1}{x_0^2} \right) x + \frac{x_0 + 2}{x_0}$$

Hoành độ của điểm A là $x = 0$, hoành độ của điểm B là nghiệm của phương trình $x + 1 = \left(\frac{x_0^2 - 1}{x_0^2} \right) x + \frac{x_0 + 2}{x_0}$ hay $x = 2x_0$. Chú ý rằng hoành độ

của điểm m là x_0 . Từ đây suy ra M là điểm giữa của AB.

b) $SAIB = 2$; $IA \cdot IB = 4\sqrt{2}$.

3. Phương trình tiếp tuyến là $y = \frac{1}{9}x + \frac{23}{9}$.

4.a) Phương trình đường thẳng đi qua I (1, 1) là $y = k(x - 1) + 1$. Giả sử đường thẳng này tiếp xúc với đồ thị, suy ra phương trình $\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = k(x - 1) + 1$ có nghiệm kép tức là phương trình $(k - 1)x^2 + 2(k - 1)x - (k - 2) = 0$ phải có nghiệm kép. Nhưng điều này không thể xảy ra.

b) Hoàn toàn tương tự như ví dụ 8.

c) Hai điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = -1$.

5. a) Tiếp tuyến với đồ thị có hệ số góc bằng 1. Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y' = \frac{5}{(2x - 1)^2} = 1$.

b) Phương trình đường thẳng qua điểm $(x_0, 0)$ bất kỳ trên trục hoành là $y = k(x - x_0)$. Đường thẳng này tiếp xúc với đồ thị khi phương trình

$\frac{x - 3}{2x - 1} = k(x - x_0)$ Hay $2kx^2 - [k(1 + 2x_0) + 1]x + (kx_0 + 3) = 0$ có nghiệm kép hay phương trình $\Delta = k^2(1 - 2x_0) - 2(1 + 2x_0)k + 1 = 0$ có nghiệm $k \neq 0$. Từ đây suy ra x_0 từ điều kiện $\Delta' = (1 - 2x_0)^2 - (1 + 2x_0) \geq 0$ hay $x_0 \leq 3$.

6. Viết được hai tiếp tuyến: $y = -x - 1$ và $y = -x + 1$.

7. $y = 24x + 27$ và $y = 105x - 210$.

8. $y = 2y = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}x + 2$; $y = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}x + 2$.

9. Đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định $y = 2x - 3$ với mọi m. Đó chính là tiếp tuyến cố định của nó.

10. Có hai tiếp tuyến $y = -2x - 1$ và $y = -2x + 7$.

§4.

1. $y = -\frac{1}{16}(12x^2 + 4x + 15)$; 2. $m < \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ và $m > \frac{1+\sqrt{13}}{2}$; cách làm tương

tự ví dụ 2. Chú ý hạn chế quỹ tích từ điều kiện $m < \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ và $m > \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

3. a) $y = ax^2 + 2(1-a)x + a + 1$ ($a \neq 0$). b) $y = x + 2$ trừ điểm $(1; 3)$.

c) Tất cả các điểm nằm trên hai đường thẳng $x = 1$ và $y = 2x + 1$, trừ giao điểm của 2 đường thẳng đó.

4. a) Quỹ tích là đường $y = 2x^2 + 1$. b) Gọi hoành độ của A là x_1 của B là x_2 với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$. Gọi A', B' là hình chiếu của A và B trên trục hoành. Khi đó $|x_1 x_2| = (x_1 x_2)^2 = 1$, suy ra $|x_1|/|x_2|^2 = x_2^2/|x_2|$.

Vậy hai tam giác vuông A'AO và B'OB đồng dạng. Suy ra $\widehat{BOA} = 90^\circ$.

5. a) Khi $m > 0$ hàm số có cực đại và cực tiểu. Quỹ tích điểm cực đại $y = 2x$, $x < 1$.

b) Quỹ tích là tất cả các điểm (x, y) có tọa độ thỏa mãn:

$$y \leq x + 1 + \frac{1}{x-1} \text{ với } x > 1, \quad y \geq x + 1 + \frac{1}{x-1} \text{ với } x < 1.$$

c) Quỹ tích là đường thẳng $y = 3x - 1$.

6. a) $y = 2x^3 - 3x$; b) Đồ thị hàm cắt đường thẳng $y = kx + k + 1$ tại điểm cố định I(-1, 1).

c) Gọi hoành độ các điểm I, M, N lần lượt là x_1, x_2, x_3 . Các x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $-x^3 + 3x^2 - 3 = kx + k + 1$ hay là $-x^3 + 3x^2 - kx - (k+4) = 0$. Theo câu b) phương trình này luôn có nghiệm $x = -1$ với mọi k , do đó phương trình có thể viết dưới dạng $(x+1)[-x^2 + 4x - (k+4)] = 0$. Phương trình này phải có 3 nghiệm, do đó phương trình $-x^2 + 4x - (k+4) = 0$ phải có 2 nghiệm, suy ra $\Delta' = k > 0$. Với điều kiện này suy ra $x_2 = 2 - \sqrt{k}$, $x_3 = 2 + \sqrt{k}$. Điểm I là giao điểm cố định nên khi k thay đổi thì đường thẳng $y = kx + k + 1$ quay quanh I. Gọi điểm giữa đoạn MN là A. Hoành độ của A sẽ là $x = \frac{x_2 + x_3}{2} = 2$. Suy ra quỹ tích là đường thẳng $x = 2$.

7. a) Quỹ tích điểm cực đại là $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

b) Quỹ tích điểm giữa đoạn thẳng nối điểm cực đại và cực tiểu chính là quỹ tích điểm uốn.

8. a) Với mọi $m \neq 0$ hàm số có cực đại, cực tiểu.

b) Khi $m > 0$. Quỹ tích điểm cực đại là nửa đường thẳng $x = 0, y > -1$, còn quỹ tích điểm cực tiểu là nửa đường cong $y = x + 1 + \frac{2}{x}, x > 0$. Khi $m < 0$, quỹ tích điểm cực tiểu là nửa đường thẳng $x = 0, y < -1$. Còn quỹ tích điểm cực đại là nửa đường cong $y = x + 1 + \frac{2}{x}, x < 0$.

9. b) Quỹ tích điểm cực đại: $y = x^3 + 3x^2 + 4x$. Quỹ tích điểm cực tiểu là $y = x^3 - 3x^2 + 4x$. c) Hai quỹ tích giao nhau tại $(0, 0)$. Đó là điểm cần tìm.

11. a) Hai điểm cố định: $(1, 1), (-1, -1)$: b) Tiếp tuyến tại $(1, 1)$ là $y = (3 + 2m)x - (2 + 2m)$, tại $(-1, -1)$ là $y = (3 - 2m)x + (2 - 2m)$.

c) Quỹ tích là đường $y = \frac{3x^2 - 2}{x}$.

12. Quỹ tích là đường $y = 4x^3 + 4x^2 + 8x$.

13. b) Quỹ tích là đường $y = 4x^3 + 2x^2 + 12x + 9$.

14. Quỹ tích là đường tròn bán kính bằng 2 có tâm là giao điểm của hai đường tiệm cận (trừ ra 4 điểm).

15. a) Quỹ tích là những điểm có tọa độ (x, y) thỏa mãn:

$$y \leq ax^2 + bx + c \quad \text{với } a > 0$$

$$y \geq ax^2 + bx + c \quad \text{với } a < 0$$

c) Quỹ tích là đường thẳng $y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$.

Chương III

CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

§1. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Muốn tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đó ta có thể làm theo hai phương pháp chính sau đây:

1. Dùng các đánh giá để tìm miền giá trị của hàm số.

2. Dùng đạo hàm để khảo sát hàm số đó.

Nếu biết được $m \leq f(x) \leq M$ với mọi giá trị của x thì $f(x)$ có giá trị

nhỏ nhất bằng m nếu tồn tại x_1 thuộc miền xác định sao cho $f(x_1) = m$ và $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng M nếu tồn tại x_2 thuộc miền xác định sao cho $f(x_2) = M$. Phương pháp này chủ yếu là dùng bất đẳng thức và dùng phương pháp xác định miền giá trị (xem phần: Miền giá trị của hàm số - chương I).

Có những hàm số có thể dùng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của nó.

Từ định nghĩa cực trị của hàm số, ta thấy rằng nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì giá trị $f(x_0)$ chỉ là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên một khoảng "nhỏ đó" chứa x_0 và nói chung không phải là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên một đoạn cho trước (chứa x_0) hay trên miền xác định của $f(x)$.

Như vậy, để tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên một đoạn $[a, b]$ ta phải xét các giá trị của $f(x)$ tại các điểm mà $f(x)$ đạt cực đại, cùng với các giá trị của $f(x)$ tại a và b (tức là $f(a)$ và $f(b)$). Số lớn nhất trong các giá trị ấy là giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[a, b]$:

$$\max_{[a,b]} f(x) = \max \{f_{\text{cực đại}}, f(a), f(b)\}.$$

Ta cũng có kết luận tương tự như vậy đối với giá trị nhỏ nhất:

$$\min_{[a,b]} f(x) = \min \{f_{\text{cực tiểu}}, f(a), f(b)\}.$$

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Giải. Cách 1. Hàm số xác định với mọi x vì

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ với mọi } x.$$

$$\text{Ta có: } y = \frac{x+1}{x^2+x+1} \leq \frac{x^2+x+1}{x^2+1} = 1.$$

$y = 1$ khi $x = 0$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 1 (đạt được khi $x = 0$).

Do $y < 0$ khi $x + 1 < 0$, $y \geq 0$ khi $x + 1 \geq 0$, nên ta chỉ cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $x + 1 < 0$. Lúc đó hàm số có dạng:

$$y = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1 + \frac{1}{x+1} - 1}$$

Vì $x+1 + \frac{1}{x+1} \leq -2$ khi $x+1 < 0$, nên $y \geq -\frac{1}{3}$ (dấu bằng đạt được khi $x+1 = -1$, hay $x = -2$).

$$\text{Vậy } y = \frac{x+1}{x^2+x+1} \geq -\frac{1}{3} \text{ với mọi } x.$$

$y = -\frac{1}{3}$ khi $x = -2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\frac{1}{3}$ (đạt được khi $x = -2$).

Cách 2 (phương pháp miền giá trị).

Xét một giá trị y_0 nào đó thuộc miền giá trị của hàm số, tồn tại giá trị x sao cho:

$$y_0 = \frac{x+1}{x^2+x+1},$$

$$\text{hay là } y_0(x^2+x+1) = x+1,$$

$$\text{hay là } y_0 x^2 + (y_0 - 1)x + (y_0 - 1) = 0. \quad (*)$$

Phương trình này phải có nghiệm.

Nếu $y_0 = 0$, thì: $-x - 1 = 0$, hay là $x = -1$.

(Vậy $y_0 = 0$ là một giá trị của hàm số, khi $x = -1$).

Khi $y_0 \neq 0$, muốn phương trình (*) có nghiệm, ta phải có:

$$\Delta = (y_0 - 1)^2 - 4y_0(y_0 - 1) \geq 0$$

$$\text{hay là: } -3y_0^2 + 2y_0 + 1 \geq 0, \text{ hay là: } -\frac{1}{3} \leq y_0 \leq 1.$$

$$\text{Ta có } y_0 = 1, \text{ khi } x = 0, y_0 = -\frac{1}{3} \text{ khi } x = -2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 1 (đạt được khi $x = 0$).

giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\frac{1}{3}$ (đạt được khi $x = -2$).

Cách 3 (dùng đạo hàm).

Hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+x+1}$ xác định với mọi x .

Ta có $y' = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$, $y' = 0$, khi $x = 0$ hoặc $x = -2$.

Để ý rằng $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2+x+1} = 0$.

Ta có bảng biến thiên sau đây:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'		0	$+$	0
y	0	$-\frac{1}{3}$ m	M	0

Bảng 4

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của hàm số bằng 1 (đạt được khi $x = 0$) và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\frac{1}{3}$ (đạt được khi $x = -2$).

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$$

Giải: Đặt $\sin x = t$, suy ra $|t| \leq 1$, khi đó hàm số đã cho có dạng:

$$y = \frac{t+1}{t^2+t+1}, \text{ với } |t| \leq 1.$$

Hàm số xác định với mọi t thuộc đoạn $[-1, 1]$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-t(t+2)}{(t^2+t+1)^2}.$$

$y' = 0$, khi $t = 0$ và $t = -2$. Ta có bảng biến thiên:

t	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-	
y				1		

Bảng 5

Ta có: $y(-1) = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = \frac{2}{3}$.

Căn cứ vào bảng biến thiên ta suy ra: Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 1 (đạt được khi $\sin x = 0$). Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0 (đạt được khi $\sin x = -1$).

Chú ý: Phương pháp thứ nhất và phương pháp thứ hai trong ví dụ 2 không thể áp dụng đối với hàm số này. Bạn đọc hãy giải thích tại sao?

Ví dụ 3. Giả sử x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình

$$x^2 + px + 1/p^2 = 0, (p \neq 0).$$

Hãy xác định p sao cho $x_1^4 + x_2^4$ là nhỏ nhất.

Giải: Để phương trình đã cho có nghiệm, ta phải có:

$$\Delta \geq 0, \text{ hay là: } \Delta = p^2 - 4/p^2 \geq 0,$$

$$\text{hay là: } p^4 - 4 \geq 0, \text{ hay là } |p| \geq \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có: } x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2 = p^4 + 2/p^4 - 4.$$

Ta phải tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(p) = p^4 + \frac{2}{p^4} - 4 \text{ với } p^4 \geq 4.$$

Đặt $p^4 = t$. Ta xét hàm số

$$F(t) = t + \frac{2}{t} - 4, t \geq 4.$$

Ta có: $F'(t) = 1 - \frac{2}{t^2} = \frac{t^2 - 2}{t^2} = \frac{(t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})}{t^2}$

$F'(t) = 0$ khi $t = -\sqrt{2}$ hoặc $t = \sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	4	∞
F'	+	0	-		-	0	+	
F								

Bảng 6

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy $F(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = \sqrt{2}$, tức là khi $p^4 = 4$ hay $|p| = \sqrt{2}$.

Vậy $x_1^4 + x_2^4$ nhỏ nhất khi $|p| = \sqrt{2}$.

Ví dụ 4. (Đề dự trù khối A năm 1977). Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{x^2 - (a-1)x + a^2}{x} \text{ khi } 0 < x \leq \sqrt{a^2 - a + 1}.$$

trong đó a là tham số dương.

Giải: Ta sẽ tìm cực tiểu của hàm số, sau đó so sánh với giá trị của hàm số tại hai đầu mút để tìm giá trị nhỏ nhất của nó.

Ta có $y' = \frac{x^2 - a^2}{x^2}$, và $y' = 0$, khi $x = -a$ và $x = a$

Vì $a > 0$ và do $0 < x \leq \sqrt{a^2 - a + 1}$ nên ta chỉ cần xét cực trị tại một điểm $x = a$.

Ta xét hai trường hợp tùy theo giá trị của a :

1) $0 < a < 1$: Lúc đó $a < \sqrt{a^2 - a + 1}$.

Trong trường hợp này ta có bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	0	a	$\sqrt{a^2 - a + 1}$	$+\infty$
y'		0	+	+
y				

cực tiểu

Bảng 7

Ta nhận thấy rằng với $0 < x \leq \sqrt{a^2 - a + 1}$ thì hàm số y đạt cực tiểu tại $x = a$, giá trị cực tiểu đó cũng chính là giá trị nhỏ nhất của hàm số trong khoảng đó. Lúc đó $y_{\min} = 1 + a$.

2) $a \geq 1$. Lúc đó: $a \geq \sqrt{a^2 - a + 1}$.

Trong trường hợp này ta có bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	0	$\sqrt{a^2 - a + 1}$	a	$+\infty$
y'		-	0	+
y				

m

Bảng 8

Ta thấy rằng hàm số nghịch biến khi $0 < x \leq \sqrt{a^2 - a + 1}$, do đó hàm số y đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \sqrt{a^2 - a + 1}$.

$$\text{Lúc đó } y_{\min} = \sqrt{a^2 - a + 1} - (a - 1) + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - a + 1}}.$$

Ví dụ 5. Với những giá trị nào của m thì

$$\sin^3 x + \cos^3 x \geq m \text{ với mọi giá trị của } x ?$$

Giải: Ta nhận thấy rằng nếu m nhỏ hơn hoặc bằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$, thì $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x \geq m$ với mọi giá trị của x. Bây giờ ta sẽ tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

$$\text{Ta có: } \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x) \cdot (1 - \sin x \cos x).$$

Đặt $\sin x + \cos x = t$, từ đó $\sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$, $|t| \leq \sqrt{2}$.

Lúc đó, $f(x)$ có thể viết lại dưới dạng:

$$F(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t, |t| \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } F'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}(t^2 - 1).$$

$F'(t) = 0$, khi $t = -1$ và $t = 1$.

Ta có bảng biến thiên sau:

t	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1		1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
F'		-	0	+	0	-	
F				m	M		

Bảng 9

$$\text{Ta có: } F(-\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, F(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, F(-1) = -1.$$

Như vậy, hàm số $F(t)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -1 (đạt được khi $t = -1$, tức là khi $\sin x + \cos x = -1$, tức là khi $x = \pi + k2\pi$ hoặc $x = -\pi/2 + k2\pi$).

Vậy muốn $\sin^3 x + \cos^3 x \geq m$ với mọi x , thì: $m \leq -1$.

Ví dụ 6. Với những giá trị nào của m thì

$$y = mx^4 - 4x + m \geq 0 \text{ với mọi } x?$$

Giải: Rõ ràng $m \neq 0$ vì $m = 0$ thì $-4x$ không thể ≥ 0 với mọi x .

$$\text{Cách 1. Tính } y' = 4mx^3 - 4 = 4(\sqrt[3]{mx} - 1)(\sqrt[3]{m^2x^2} + \sqrt[3]{mx} + 1)$$

$$\text{Xét } g(x) = \sqrt[3]{m^2x^2} + \sqrt[3]{mx} + 1 \text{ có}$$

$$\Delta = \sqrt[3]{m^2} - 4\sqrt[3]{m^2} = -3\sqrt[3]{m^2} < 0,$$

do đó $g(x) > 0$ với mọi x . Vì vậy dấu của y' trùng với dấu của biểu thức $(\sqrt[3]{mx} - 1)$. Xét các trường hợp sau:

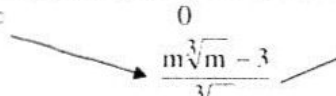
(*). Nếu $m < 0$, khi đó

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (mx^4 - 4x + m) = -\infty < 0.$$

Vậy với $m < 0$ biểu thức $mx^4 - 4x + m$ không thể ≥ 0 với mọi x .

(*). Nếu $m > 0$. Ta có bảng biến thiên sau đây:

x	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt[3]{m}}$	$+\infty$
$\sqrt[3]{mx} - 1$	-	0	+
y'	-	0	+
y	$+\infty$	0	$+\infty$



$$\frac{m\sqrt[3]{m} - 3}{\sqrt[3]{m}}$$

Bảng 10

Từ đây thấy rằng giá trị nhỏ nhất của y bằng $\frac{m\sqrt[3]{m} - 3}{\sqrt[3]{m}}$.

Để $y \geq 0$ với mọi x thì $\frac{m\sqrt[3]{m} - 3}{\sqrt[3]{m}} \geq 0$, vì $m > 0$

nên suy ra $m\sqrt[3]{m} - 3 \geq 0$, hay $m \geq \sqrt[4]{27}$

Nhận xét: Vì vế trái của bất đẳng thức là một biểu thức có chứa tham số m nên cần phải biện luận theo các giá trị của m . Đối với một số học sinh trung bình thì việc biện luận đó thường là vấn đề khó và hay bỏ sót các khả năng có thể xảy ra.

Vì vậy, chúng ta xét phương pháp sau đây, một vế của bất đẳng thức không chứa tham số m mà vẫn đảm bảo yêu cầu của bài toán.

Cách 2. Từ bất đẳng thức $mx^4 - 4x + m \geq 0, \forall x$, suy ra

$$m \geq \frac{4x}{1+x^4}, \quad \forall x.$$

Do đó cần xét hàm số $y = \frac{4x}{1+x^4}$ và tìm giá trị lớn nhất của hàm số đó. Giả sử giá trị lớn nhất đó là y_0 thì từ điều kiện $m \geq y_0$ ta sẽ suy ra lời giải của bài toán.

Khảo sát hàm số $y = \frac{4x}{1+x^4}$, ta có

$$y' = \frac{4(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}. \text{ Bảng biến thiên là:}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0
y	0	$\searrow -\sqrt[4]{27}$	$\nearrow \sqrt[4]{27}$	$\searrow 0$

Bảng 11

Qua bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất $y_0 = \sqrt[4]{27}$.

Do đó nghiệm của bài toán là $m \geq \sqrt[4]{27}$.

Cách 3. Xét hàm số $y = mx^4 - 4x + m$. Tính y' và y'' ta có:

$$y' = 4mx^3 - 4; y'' = 12mx^2.$$

Để $y \geq 0$ với mọi x thì tại $x = 0$ biểu thức y cũng phải ≥ 0 . Ta có $y(0) = m \geq 0$.

Với $m \geq 0$ thì $y'' \geq 0$ ($\forall x$), do đó hàm số này là hàm lồi. Ta đã biết rằng đối với hàm số lồi thì giá trị nhỏ nhất trùng với giá trị cực tiểu (nếu hoành độ điểm cực tiểu thuộc miền cần xét). Do đó chỉ cần tìm giá trị cực tiểu:

$$y' = 0 \Rightarrow x = 1/\sqrt[3]{m}$$

$$y_{\min} = y(1/\sqrt[3]{m}) = \frac{m\sqrt[3]{m} - 3}{\sqrt[3]{m}}, \text{ vì } \sqrt[3]{m} > 0 \text{ nên}$$

$$y_{\min} \geq 0 \Rightarrow m \geq \sqrt[4]{27}$$

Ví dụ 7. Với giá trị nào của m , phương trình

$$1 + \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x = m \text{ có nghiệm?}$$

Giải: Nếu xác định được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của vế trái, chẳng hạn giá trị nhỏ nhất là N , lớn nhất là L thì điều kiện để phương trình đó có nghiệm là $N \leq m \leq L$. Vì vậy cần phải xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$y = 1 + \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x.$$

Cách 1. Xét hàm số $y = 1 + \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$:

$$\begin{aligned} y &= 1 + \cos x + \frac{1}{2} (2 \cos^2 x - 1) + \frac{1}{3} (4 \cos^3 x - 3 \cos x) = \\ &= \frac{4}{3} \cos^3 x + \cos^2 x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Đặt $t = \cos x$, $|t| \leq 1$, khi đó $y = \frac{4}{3}t^3 + t^2 + \frac{1}{2}$.

Bài toán trở thành: tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$y = \frac{4}{3}t^3 + t^2 + \frac{1}{2} \text{ với điều kiện } |t| \leq 1$$

Tính $y' = 4t^2 + 2t$, $y' = 0 \Rightarrow t = 0$ và $t = -\frac{1}{2}$. Ta có bảng biến thiên trên đoạn $[-1, 1]$.

t	-1	-1/2	0	1
y'	+	0	-	0
y	1/6	7/12	1/2	17/6

Bảng 12

Từ bảng biến thiên ta thấy:

$$\text{Giá trị nhỏ nhất } N = \min\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Giá trị lớn nhất } L = \max\left(\frac{7}{12}, \frac{17}{6}\right) = \frac{17}{6}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nếu $\frac{1}{6} \leq m \leq \frac{17}{6}$.

Cách 2. Chú ý rằng nếu lấy trực tiếp đạo hàm của vế trái thì các hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$ được khử đi. Vì vậy ta có cách sau đây.

$$\begin{aligned} \text{Tính } y' &= -\sin x - \sin 2x - \sin 3x \\ &= -4\sin 2x \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

Chú ý rằng hàm đang xét là hàm tuần hoàn, nên chỉ cần xét trên đoạn $[-\pi, \pi]$ là đủ. Ta có bảng biến thiên của hàm số trên $[-\pi, \pi]$ như sau:

x	$-\pi$	$-2\pi/3$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
y'	0	+	0	-	0	+	0
y	1/6	13/12	1/2	17/6	1/2	13/12	1/6

Bảng 13

Từ bảng biến thiên ta có:

$$\text{Giá trị nhỏ nhất } N = \min\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6};$$

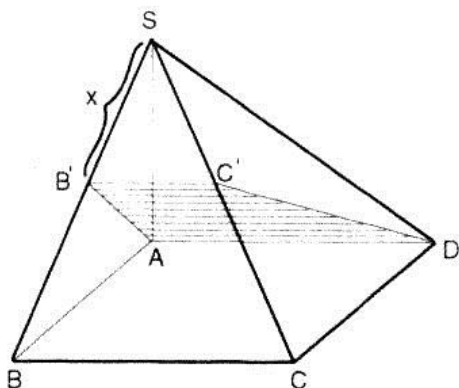
$$\text{Giá trị lớn nhất } L = \max\left(\frac{13}{12}, \frac{17}{6}\right) = \frac{17}{6}.$$

Vậy phương trình có nghiệm khi $\frac{1}{6} \leq m \leq \frac{17}{6}$.

Ví dụ 8. Cho hình chóp tứ giác S ABCD với đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Cạnh SA = $a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt

phẳng đáy. Giả sử B' là một điểm tùy ý thuộc cạnh SB . Gọi $SB' = x$. Giả sử mặt phẳng (ADB') cắt cạnh SC tại C' . Hãy xác định x sao cho diện tích của tứ giác $ADC'B'$ là: a) nhỏ nhất; b) lớn nhất.

Giải: Dễ dàng suy ra tứ giác $ADC'B'$ là một hình thang vuông (vuông tại A và B').



Hình 20

Ta có $\frac{B'C'}{a} = \frac{x}{2a}$ suy ra $B'C' = \frac{x}{2}$.

Xét $\triangle ABB'$ ta có:

$$AB'^2 = AB^2 + BB'^2 - 2AB \cdot BB' \cos(\angle ABS) =$$

$$= a^2 + (2a - x)^2 - 2a(2a - x) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= x^2 - 3ax + 3a^2.$$

Diện tích của tứ giác $ADC'B'$ là:

$$S = \frac{1}{2} [AD + B'C'] \cdot AB' = \frac{1}{2} \left(a + \frac{x}{2}\right) \cdot \sqrt{x^2 - 3ax + 3a^2}$$

$$= \frac{1}{4} (x + 2a) \sqrt{x^2 - 3ax + 3a^2}; \quad 0 \leq x \leq 2a$$

Xét hàm số: $F(x) = \frac{1}{4} (x + 2a) \sqrt{x^2 - 3ax + 3a^2}.$

$$\text{Ta có: } F'(x) = \frac{1}{4} \left[\sqrt{x^2 - 3ax + 3a^2} + \frac{(x+2a)(2x-3a)}{2\sqrt{x^2 - 3ax + 3a^2}} \right] = \frac{4x^2 - 5ax}{8\sqrt{x^2 - 3ax + 3a^2}}.$$

$$F'(x) = 0 \text{ khi } x = 0 \text{ và } x = \frac{5a}{4}.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	$\frac{5a}{4}$	2a	$+\infty$
F'		+	0	-	0
F					

Bảng 14

$$\text{Ta có } F(0) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}, F(2a) = a^2.$$

Vì $a^2 > \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, nên S có giá trị nhỏ nhất khi $x = \frac{5a}{4}$ và S có giá trị lớn nhất khi $x = 2a$ (lúc đó B' trùng với B).

BÀI TẬP

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = \sin^3 x - \cos^3 x$; b) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$; c) $y = \sin^8 x + \cos^8 x$; d) $y = \sin x \cdot \sin 2x$; e) $y = \cos x \cdot \cos 2x$.

2. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$;

b) $y = \sqrt{\sin^2 x + a \cos^2 x} + \sqrt{\cos^2 x + a \sin^2 x}$.

3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ trên đoạn $[0, 3]$.

b) $y = x + \frac{1}{x^2}$ với $x > 0$; c) $\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x+3}}$;

d) $y = \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1}$; e) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

4. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = \frac{3x+1}{x-2}$ trên đoạn $[3, 5]$; b) $y = \frac{1+\sin x}{a+\cos x}$ ($a > 1$).

5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x+3)^4 + (x+5)^4$.

6. Hãy xác định p sao cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + p}{x-4}$ có giá trị cực đại M và giá trị cực tiểu m với $|M - m| = 8$.

7. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = x^m \cdot (1-x)^n$ với $0 \leq x \leq 1$ và m, n là những số nguyên dương.

8. Cho phương trình

$$\sin^4 x + (1 + \sin x)^4 = m.$$

a) Giải phương trình khi $m = 17$.

b) Với m nào thì phương trình có nghiệm.

9. Cho $y = \cos^4 x + (1 - \cos x)^4$.

a) Chứng minh rằng $\frac{1}{8} \leq y \leq 17$.

b) Giải phương trình $y = \frac{1}{8}$.

c) Biện luận theo m phương trình $y = m$.

10. Với những giá trị nào của m thì:

$$\cos^4 x + m \cos x + 1 \geq 0, \text{ với mọi } x?$$

11. Cho hàm số $y = 4x^3 - mx$. Xác định m sao cho $|y| \leq 1$, khi $|x| \leq 1$.

12. Cho hình thang vuông ABCD có góc vuông ở A và D và có $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc với

mặt phẳng của hình thang dựng tại D ta lấy điểm S với $DS = a$. Giả sử M là một điểm thay đổi trên SA, gọi $AM = x$. Mặt phẳng (CDM) cắt SB tại N. Tính diện tích tứ giác CDMN theo a và x. Xác định x để diện tích đó nhỏ nhất.

13. Cho hình chóp tứ giác SABCD. Biết rằng hình chóp này có bảy cạnh bằng 1 và một cạnh bên $SB = x$. Tính thể tích của hình chóp theo x. Xác định x để thể tích đó lớn nhất.

14*. Chứng minh rằng khi $0 < x < \pi$ ta luôn có

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{n} \sin nx > 0$$

với mọi n là số tự nhiên.

15. Với các giá trị nào của m thì

$$1 + \cos x + m \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x > 0$$

với mọi giá trị của x.

16. Cho phương trình $\cos x + 2\cos 2x = m + \cos 3x$.

a) Giải phương trình khi $m = 2$.

b) Với m nào phương trình vô nghiệm.

17. Cho phương trình $x^4 - 6x^3 + mx^2 - 12x + 4 = 0$.

a) Giải phương trình khi $m = 13$.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm.

§2. Một số bài toán về khoảng cách

Ta đã biết độ dài AB của đoạn thẳng nối hai điểm A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) được cho bởi công thức

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Nếu $y_1 = y_2$ (tức đoạn AB nằm trên đường thẳng song song với trục hoành) ta có $AB^2 = (x_2 - x_1)^2$ hay $AB = |x_2 - x_1|$.

Đặc biệt, nếu điểm M (x, y) luôn luôn cách đều điểm I (a, b) một khoảng R, thì ta có $R^2 = MI^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$.

Quỹ tích điểm M là đường tròn tâm I bán kính R, vì vậy người ta nói rằng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ là phương trình đường tròn tâm I (a,b) bán kính R.

Ví dụ 1. Cho hai parabol $y = -x^2 + 2x + 3$, (1)

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3, \quad (2)$$

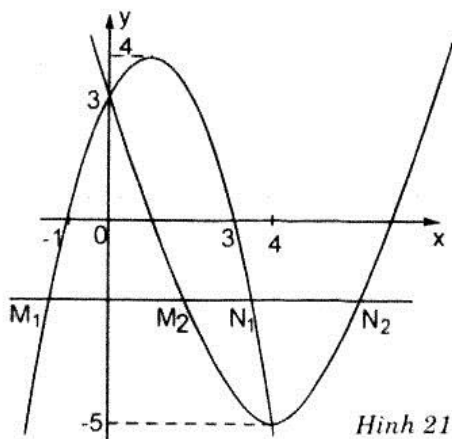
a) Hãy xác định các giá trị của m sao cho đường thẳng $y = m$ cắt cả hai parabol (1) và (2).

b) Giả sử m thỏa mãn điều kiện câu a). Ký hiệu các giao điểm của đường thẳng $y = m$ với parabol (1) là M_1, N_1 , với parabol (2) là M_2, N_2 . Hãy xác định m sao cho độ dài các đoạn M_1N_1 và M_2N_2 bằng nhau. Tính độ dài của chúng trong trường hợp bằng nhau.

Giải: Hai parabol cắt nhau tại A (0, 3), B (4, -5) (xem hình vẽ).

a) Căn cứ vào đồ thị, suy ra với $-5 \leq m \leq 3$ thì đường thẳng $y = m$ cắt cả hai parabol (1) và (2).

b) Để đường thẳng cắt parabol (1) tại hai điểm $M_1(x_1, y_1), N_1(x_2, y_2)$ thì phương trình $x^2 + 2x + 3$ phải có hai



Hình 21

nghiệm x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$). Khi đó khoảng cách M_1N_1 được xác định bằng

$$\begin{aligned} M_1N_1^2 &= (x_2 - x_1)^2 = x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4(4 - m). \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó } M_1N_1 = 2\sqrt{4 - m}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta có độ dài đoạn M_2N_2 bằng

$$M_2N_2 = 2\sqrt{2(5 + m)}.$$

$$\text{Như vậy } M_1N_1 = M_2N_2 \text{ khi và chỉ khi } 2\sqrt{4 - m} = 2\sqrt{2(5 + m)}$$

Giải phương trình này ta được $m = -2$. Lúc đó $M_1N_1 = M_2N_2 = 2\sqrt{6}$.

Ví dụ 2. Cho parabol $y = x^2$.

a) Tìm một điểm A cố định và một đường thẳng d cố định có phương trình $y = m$, sao cho với mọi điểm M thuộc parabol, thì khoảng cách từ M đến A bằng khoảng cách từ M đến đường thẳng d.

b) Chứng minh rằng từ một điểm bất kỳ trên đường thẳng d (đã tìm được ở câu a) ta có thể kẻ được hai tiếp tuyến tới parabol và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Giải: a) Trước hết, ta nhận thấy muốn thỏa mãn yêu cầu trong đầu bài thì:

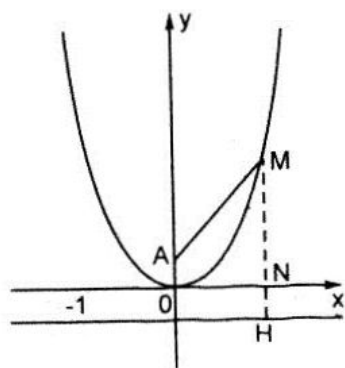
1) Điểm A phải nằm trên trục tung Oy.

2) Tung độ của điểm A phải dương.

3) A và A' đối xứng với nhau qua trục hoành (A' là giao của d với Oy).

(Bạn đọc tự kiểm tra ba nhận xét đó).

Bây giờ ta sẽ chỉ rõ vị trí của A và d. Gọi tung độ của A là h.



Hình 22

Xét một điểm M bất kỳ nằm trên parabol. Khi đó tọa độ của M là $M(x, x^2)$. Ta có:

$$MA^2 = x^2 + (x^2 - h)^2.$$

Gọi MH là khoảng cách từ M đến đường thẳng d.

$$\text{Ta có: } MH^2 = (MN + NH)^2 = (x^2 + h)^2.$$

Do $MA = MH$ với mọi x nên suy ra:

$$x^2 + (x^2 - h)^2 = (x^2 + h)^2, \text{ với mọi } x, \text{ hay là } (4h - 1)x^2 = 0, \text{ với mọi } x.$$

Điều này tương đương với

$$4h - 1 = 0, \text{ hay là } h = \frac{1}{4}.$$

Vậy điểm A cần tìm có tọa độ $(0, \frac{1}{4})$ và đường thẳng d cần tìm có phương trình $y = -\frac{1}{4}$.

b) Giả sử T là một điểm bất kỳ trên đường thẳng

$$y = -\frac{1}{4}. \text{ Gọi tọa độ của T là } T(x_0; -\frac{1}{4}).$$

Xét đường thẳng đi qua T và có hệ số góc k . Phương trình đường thẳng đó là $y = k(x - x_0) - \frac{1}{4}$.

Giả sử rằng đường thẳng này là tiếp tuyến của parabol $y = x^2$.

Khi đó phương trình: $x^2 = k(x - x_0) - \frac{1}{4} = 0$ phải có nghiệm kép.

$$\text{Hay là phương trình: } x^2 - kx + (kx_0 + \frac{1}{4}) = 0 \text{ phải có nghiệm kép.}$$

$$\text{Tức là ta phải có: } \Delta = k^2 - 4x_0k - 1 = 0.$$

Nhận thấy rằng với mọi x_0 phương trình trên luôn có hai nghiệm phân biệt k_1, k_2 , đồng thời $k_1 k_2 = -1$.

Từ đó suy ra qua điểm T có thể kẻ được hai tiếp tuyến với parabol và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

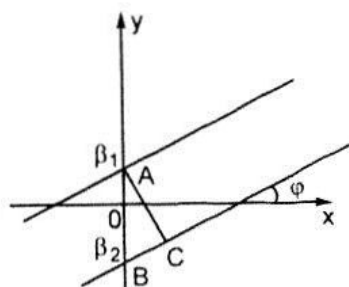
Ví dụ 3. a) Hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song:

$$y_1 = \alpha_1 x + \beta_1;$$

$$y_2 = \alpha_2 x + \beta_2.$$

b) Từ đó, suy ra công thức tính khoảng cách h từ một điểm $A(x_0, y_0)$ tới đường thẳng $y = ax + b$ là:

$$h = \frac{|ax_0 + b - y_0|}{\sqrt{1 + a^2}}.$$



Hình 23

Giải: a) Hai đường thẳng đã cho cắt trục tung tương ứng tại các điểm $A(0, \beta_1)$; $B(0, \beta_2)$.

Xét tam giác vuông ABC (vuông tại C). Rõ ràng rằng $A = \varphi$, với $\operatorname{tg} \varphi = \alpha_1$.

$$\text{Ta có: } AC = |\beta_1 - \beta_2| \cos A = |\beta_1 - \beta_2| \cos \varphi =$$

$$= \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng đó là

$$AC = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \alpha_1^2}}.$$

b) Đường thẳng đi qua điểm $A(x_0, y_0)$ và song song với đường thẳng $y = ax + b$ có dạng :

$$y = a(x - x_0) + y_0, \text{ hay là } y = ax - ax_0 + y_0.$$

Vậy theo câu a), ta nhận được khoảng cách từ $A(x_0, y_0)$ đến đường thẳng $y = ax + b$ là

$$h = \frac{|ax_0 + b - y_0|}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.

Hãy xác định khoảng cách từ các điểm cực đại, cực tiểu tới tiếp tuyến với đồ thị tại điểm $(1, -1)$.

Giải: Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(1, -1)$ là :

$$y = -12x + 11. \quad (1)$$

Áp dụng kết quả trong ví dụ 3 (câu b) ta suy ra khoảng cách từ điểm cực đại $A(-1, 15)$ đến tiếp tuyến (1) là :

$$h = \frac{|-12 \cdot (-1) + 11 - 15|}{\sqrt{1 + (-12)^2}} = \frac{8}{\sqrt{145}}.$$

Tương tự, khoảng cách từ điểm cực tiểu $B(3, -17)$ đến tiếp tuyến (1) là:

$$h = \frac{|-12 \cdot 3 + 11 + 17|}{\sqrt{1 + (-12)^2}} = \frac{8}{\sqrt{145}}.$$

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$.

Chứng minh rằng với mọi m , đường thẳng $y = m$ luôn luôn cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A và B. Xác định m để độ dài đoạn AB là ngắn nhất.

2. Cho hàm số $y = x + 1 + \frac{1}{x - 1}$.

a) Tìm hai điểm A, B thuộc hai nhánh của đồ thị, sao cho khoảng cách AB là ngắn nhất.

b) Xác định m sao cho đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị của hàm số tại hai điểm với khoảng cách giữa hai giao điểm bằng $\sqrt{5}$.

3. Cho hàm số $y = x + 1 + \frac{4}{x - 1}$.

a) Hãy tính khoảng cách từ các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị đến các đường tiệm cận.

b) Tìm trên đồ thị những điểm cách đều hai trục tọa độ.

4. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx + m}{x - 1}$.

Chứng minh rằng với mọi m hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu, đồng thời chứng minh rằng khoảng cách giữa các điểm cực trị luôn luôn không đổi. Tính khoảng cách đó.

5. Chứng minh rằng với mọi m đồ thị của hàm số

$$y = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$$

luôn luôn cắt đường thẳng $y = x$ tại hai điểm phân biệt. Có nhận xét gì về khoảng cách giữa hai giao điểm khi m thay đổi.

6. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 6}{\sqrt{3x}}$.

Tìm tất cả các điểm trên đồ thị cách đều hai tiệm cận.

7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

a) Tìm trên đồ thị những điểm cách đều hai trục tọa độ.

b) Tính khoảng cách giữa các điểm cực trị.

8. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

Xác định m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D sao cho: $AB = BC = CD$.

9. Cho hàm số $y = x^4 - 2p^2x^2 + q$ ($p \neq 0$).

Với những giá trị nào của p và q thì các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số lập thành một tam giác đều.

10. Tìm quỹ tích các điểm (x, y) trên mặt phẳng tọa độ có các tọa độ thỏa mãn điều kiện :

$$x^2 + y^2 + x - 2y = 8.$$

11. Cho trước điểm A (x_0, y_0) ; $y_0 \neq 0$. Tìm quỹ tích tất cả những điểm trên mặt phẳng tọa độ sao cho khoảng cách từ điểm đó tới A và trục hoành bằng nhau.

12. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Hãy xác định m sao cho trên đồ thị của hàm số tồn tại cặp điểm có tiếp tuyến song song với nhau và khoảng cách giữa chúng bằng m .

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP

Chương III

§1.

1. a) Lớn nhất bằng 1, nhỏ nhất bằng -1; b) Lớn nhất bằng 1, nhỏ nhất bằng $1/4$; c) Lớn nhất bằng 1, nhỏ nhất bằng $1/8$; d) Lớn nhất bằng $4\sqrt{3/9}$, nhỏ nhất bằng $-4\sqrt{3/9}$; e) Lớn nhất bằng 1, nhỏ nhất bằng -1.

2. a) Nhỏ nhất bằng 2, lớn nhất không có; b) Vì y không âm nên có thể bình phương để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

3. a) Lớn nhất bằng 10, nhỏ nhất bằng 1; b) Nhỏ nhất bằng $3\sqrt{2/2}$, lớn nhất không có; c) Nhỏ nhất bằng 1, lớn nhất không có; d) Nhỏ nhất bằng -1, lớn nhất bằng $1/3$; e) Nhỏ nhất bằng $1/3$, lớn nhất bằng 3.

4. Lớn nhất bằng 10, nhỏ nhất bằng $16/3$; b) Lớn nhất bằng $2a/(a^2 - 1)$, nhỏ nhất bằng 0.

5. Giá trị nhỏ nhất bằng 2.

6. $p = 0$.

7. Giá trị lớn nhất bằng $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$, nhỏ nhất bằng 0.

8. Xét $y = \sin^4 x + (1 + \sin x)^4 = 2\sin^4 x + 4\sin^3 x + 6\sin^2 x + 4\sin x + 1$.

Khảo sát hàm số $y = 2t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1$ với $-1 \leq t \leq 1$. Ta có giá trị nhỏ nhất của y trên $[-1, 1]$ là $1/8$, đạt được khi $\sin x = -1/2$ và giá trị lớn nhất bằng 17, đạt được khi $\sin x = 1$. Từ đây suy ra:

a) Với $m = 17$, phương trình dẫn đến $\sin x = 1$ do đó $x = \pi/2 + 2k\pi$

b) Phương trình có nghiệm khi $\frac{1}{8} \leq m \leq 17$

9. a) Tương tự như bài 8:

b) Phương trình dẫn tới $\cos x = \frac{1}{2}$ hay $x = \frac{\pi}{3} \pm 2k\pi$;

c) $m = \frac{1}{8}$, $1 < m \leq 17$ phương trình có hai nghiệm.

10. Cần xác định m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^4 x + m \cos x + 1$ không âm (chú ý rằng $x \in [\cos x] \leq 1$).

11. $m = 3$.

12. Diện tích nhỏ nhất khi $x = \frac{a(\sqrt{32} + \sqrt{50} - \sqrt{34})}{8}$.

13. Thể tích lớn nhất khi $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

15. Xét $y = 1 + \cos x + m \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x = \frac{4}{3} \cos^3 x + 2m \cos^2 x - (m-1)$

Đặt $t = \cos x$, $-1 \leq t \leq 1$. Khảo sát $y = 4t^3/3 + 2mt^2 - (m-1)$ với $-1 \leq t \leq 1$.
 $y' = 4t(t+m) = 0 \Rightarrow t = 0, t = -m$. Xét các trường hợp:

- 1) $-m \leq -1$;
- 2) $-1 \leq -m \leq 0$;
- 3) $0 \leq -m \leq 1$;
- 4) $1 \leq -m$.

Đáp số: $\frac{1}{3} < m \leq 1$.

16. Hãy khảo sát hàm số $y = -\cos 3x + \cos x + 2\cos 2x$
 $= -4\cos^3 x + 4\cos^2 x + 4\cos x - 2$.

Đặt $t = \cos x$, $-1 \leq t \leq 1$. Khảo sát $y = -4t^3 + 4t^2 + 4t - 2$,
 $-1 \leq t \leq 1$.

t	-1	-1/3	1
y'	-	0	+
y	2	-74/3	2

Từ bảng biến thiên trên suy ra:

a) Phương trình khi $m = 2$ tương đương với $\cos x = -1$ và $\cos x = 1$.

b) Phương trình vô nghiệm khi $m < -\frac{74}{3}$ hoặc $m > 2$.

17. Vì $x = 0$ không thể là nghiệm, nên phương trình đã cho tương đương với phương trình $-x^2 + 6x + (12x-4)/x^2 = m$.

Khảo sát hàm số $y = -x^2 + 6x + \frac{12x-4}{x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= -2x + 6 - 4 \cdot \frac{3x - 2}{8} = \\ &= \frac{(2x - 2)(x - 2)(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x)}{x^4} \end{aligned}$$

Đưa vào bảng xét dấu của y' ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
y'	+	0	-	+	0	-	+
y	$-\infty$	$-4-12\sqrt{2}$	$-\infty$	13	$-\infty$	$-4+12\sqrt{2}$	$+\infty$

Đưa vào bảng biến thiên ta thấy:

- a) $m = 13$ thì có hai nghiệm $x = 1, x = 2$.
b) Phương trình có nghiệm khi $m \leq 13$.

§2.

1. $m = -1$.

2. a) $(-1, -\frac{1}{2}), (3, \frac{9}{2})$. b) $m = \pm\sqrt{5}$

3. b) Chú ý rằng những điểm cách đều 2 trục tọa độ là các điểm nằm trên các đường phân giác $y = x$ và $y = -x$.

Những điểm có hoành độ thỏa mãn phương trình:

$$x + 1 + \frac{4}{x-1} = x \text{ và } x + 1 + \frac{4}{x-1} = -x.$$

là những điểm trên đồ thị cách đều hai trục tọa độ.

4. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là $\sqrt{20}$

5. Khoảng cách giữa hai giao điểm luôn luôn không đổi.

6. Hai điểm $(-\sqrt{3}, -3); (\sqrt{3}, 3)$.

7. Tương tự bài 3.

8. Ta phải tìm m , sao cho phương trình:

$$x^4 - 2x^2 + 2 = m \text{ có bốn nghiệm là } \pm 3x_0, \pm x_0 \text{ (với } x_0 > 0).$$

Từ đó suy ra $x_0^2 = \frac{1}{5}$ và $m = \frac{41}{25}$.

9. p và q phải thỏa mãn: $p = \sqrt[6]{3}$, q tùy ý.

10. Hệ thức đã cho có dạng $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 1)^2 = \frac{37}{4}$.

Vậy quỹ tích là đường tròn tâm $(-\frac{1}{2}, 1)$, bán kính $\frac{\sqrt{37}}{2}$.

11. Quỹ tích là parabol $y = \frac{1}{2y_0}(x - x_0)^2 + \frac{y_0}{2}$.

12. Chú ý rằng 2 điểm đó là hai điểm đối xứng nhau qua tâm đối xứng $(1, 1)$ và m phải lớn hơn hoặc bằng khoảng cách giữa hai giao điểm A, B của đồ thị với đường thẳng $y = x$. (Bạn đọc giải thích tại sao?).

Chương IV

CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH HÌNH

§1. Khảo sát và vẽ đồ thị của một hàm số

Trong các kỳ thi vào đại học, vấn đề khảo sát và vẽ đồ thị của một hàm số thường được đặt ra. Dựa vào những đặc điểm cơ bản của một hàm số ta có thể vẽ đồ thị của hàm số một cách khá chính xác.

Học sinh cần phải nhớ đường lối tổng quát sau đây để khảo sát một hàm số và vẽ đồ thị của nó.

1) Tìm khoảng xác định của hàm số; kiểm nghiệm xem hàm số có tính chẵn, lẻ, tuần hoàn hay không (để thu hẹp bớt phạm vi khảo sát).

2) Tính đạo hàm bậc nhất của hàm số, xác định chiều biến thiên và các điểm cực trị.

3) Nếu có thể, tính đạo hàm bậc hai để kiểm nghiệm các cực trị và để xác định các điểm uốn.

Xác định các tiệm cận (đứng, ngang, xiên) của hàm số.

4) Lập bảng tổng kết các kết quả trên (gọi là bảng biến thiên của hàm số). Tìm một số điểm đặc biệt của đồ thị.

5) Vẽ đồ thị của hàm số.

Để học sinh nắm được một cách sâu sắc hơn về việc xây dựng đồ thị của một hàm số, dưới đây, chúng ta sẽ đưa thêm vào một số kiến thức liên quan đến dạng đồ thị của một hàm số. Phần cuối cùng của mục này nhằm hướng dẫn cho học sinh khảo sát và vẽ đồ thị một cách thành thạo các hàm số quan trọng thường gặp. Đó là mục đích chính của phần định hình.

I. Kiến thức chuẩn bị

a) Cực đại, cực tiểu của một hàm số

Định nghĩa. Giả sử $y = f(x)$ là hàm số xác định trên khoảng (a, b) và x_0 là một điểm thuộc khoảng ấy.

1) Nếu có một số $h > 0$, sao cho với mọi x thuộc $(x_0 - h, x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ mà ta có $f(x) > f(x_0)$, thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ đạt cực đại (hay cực đại địa phương) tại điểm x_0 .

2) Nếu với mọi x thuộc $(x_0 - h, x_0 + h)$ và $x \neq x_0$, mà ta có $f(x_0) < f(x)$, thì ta nói rằng hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu (hay cực tiểu địa phương) tại x_0 . Các điểm cực đại, cực tiểu của hàm số thường được gọi chung là các điểm cực trị.

Định lý. Giả sử hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại điểm $x = x_0$. Nếu tại điểm đó tồn tại đạo hàm $f'(x)$ thì

$$f'(x_0) = 0.$$

Chú ý: Đây chỉ là điều kiện cần để hàm số có cực trị. Điều ngược lại không đúng (chẳng hạn, hàm số $y = x^2$ có $y'(0) = 0$ song tại đó hàm số không đạt cực trị).

Hệ quả: Hàm số $y = f(x)$ chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó hoặc đạo hàm bằng không hoặc đạo hàm không tồn tại.

Những điểm mà tại đó đạo hàm bằng không ta gọi là “điểm dừng”.

Muốn khẳng định tại điểm nào trong chúng hàm số đạt cực trị, ta áp dụng điều kiện đủ sau đây :

Định lý. Giả sử x_0 là "điểm dừng".

1) Nếu $f'(x) < 0$ khi $x < x_0$ và $f'(x) > 0$ khi $x > x_0$, thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

2) Nếu $f'(x) > 0$ khi $x < x_0$ và $f'(x) < 0$ khi $x > x_0$, thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .

3) Nếu $f'(x)$ không đổi dấu khi x đi qua giá trị x_0 , thì hàm số không đạt cực trị tại x_0 .

Định lý trên cho ta qui tắc thứ nhất tìm cực đại, cực tiểu của một hàm số. Nó hay được dùng nhất, vì bên cạnh việc xác định cực đại, cực tiểu, trong nhiều bài toán, cần xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số đang khảo sát.

Trong trường hợp không cần xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến của $y = f(x)$ và hàm số này có đạo hàm bậc hai, ta có qui tắc thứ hai để tìm cực đại, cực tiểu.

Định lý. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm bậc hai và $f'(x_0) = 0$.

1) Nếu $f''(x_0) < 0$, thì hàm số đạt cực đại tại x_0 .

2) Nếu $f''(x_0) > 0$, thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{qx^2 + px + pq}{px + q}$.

(p, q là tham số). Hãy xác định p và q , sao cho hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = 0$ và $x = 4$.

Giải: Để hàm số có cực trị tại $x = 0$ và $x = 4$, thì đạo hàm y' phải triệt tiêu và đổi dấu tại các điểm đó.

$$\text{Ta có : } y' = \frac{pqx^2 + 2q^2x + pq - qp^2}{(px + q)^2}$$

$$y'(0) = 0, \text{ khi } pq(1 - p) = 0.$$

$$y'(4) = 0, \text{ khi } 16pq + 8q^2 + pq(1 - p) = 0.$$

Như vậy ta phải có:

$$(*) \begin{cases} pq(1-p) = 0 \\ 8q(2p+q) = 0. \end{cases}$$

Nghiệm của hệ (*) là:

$$(1) \begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} p=1 \\ q=0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} q=0 \\ p \text{ tùy ý} \end{cases} \quad (4) \begin{cases} p=1 \\ q=-2 \end{cases}$$

Các cặp giá trị $(p=0, q=0)$, $(p=1, q=0)$, $(q=0, p \text{ tùy ý})$ hiển nhiên bị loại.

Với $p=1, q=-2$ hàm số đã cho có dạng:

$$y = \frac{-2x^2 + x - 2}{x - 2}.$$

Hàm số này xác định với mọi $x \neq 2$ và có đạo hàm:

$$y' = \frac{-2x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

Căn cứ vào dấu của y' , ta có bảng biến thiên sau:

x	-x	0	2	4	+x	
y'	-	0	+	+	0	-
y	+x		+x	15	-x	

Bảng 15

Như vậy, hàm số này đạt cực trị tại $x=0, x=4$. Vậy $p=1$ và $q=-2$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 2. (A - 1980). Với giá trị dương nào của m thì hàm số

$$y = \frac{x^2 + m^2x + 2m^2 - 5m + 3}{x}$$

có cực tiểu nằm trong khoảng $0 < x < 2m$?

Giải: Hàm số đã cho không xác định khi $x=0$.

Ta có: $y' = \frac{x^2 - (2m^2 - 5m + 3)}{x^2}$.

Nếu $2m^2 - 5m + 3 \leq 0$, tức là nếu $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$, thì $y' > 0$ với mọi $x \neq 0$, nên y không có cực tiểu. Nếu $2m^2 - 5m + 3 > 0$, tức là nếu $m < 1$ hoặc $m > \frac{3}{2}$, thì $y' = 0$ khi $x = \pm \sqrt{2m^2 - 5m + 3}$.

Trong trường hợp này ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2m^2 - 5m + 3}$	0	$+\sqrt{2m^2 - 5m + 3}$	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y		$\nearrow$ M $\searrow$		$\searrow$ m $\nearrow$	

Bảng 16

Hàm số có cực tiểu tại $x = \sqrt{2m^2 - 5m + 3}$. Điểm ấy nằm trong khoảng $0 < x < 2m$ nếu:

$$\sqrt{2m^2 - 5m + 3} < 2m$$

Vì $m > 0$, nên bất phương trình này tương đương với:

$2m^2 - 5m + 3 < 4m^2$, hay là $2m^2 + 5m - 3 > 0$. Bất phương trình cuối cùng có nghiệm là $m < -3$, hoặc $m > 1/2$.

Kết hợp với trên, ta suy ra các giá trị cần tìm của m là:

$$\frac{1}{2} < m < 1 \text{ hoặc } m > \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 3. Tìm tham số m để cho hàm số

$$y = -x^3 + 3(m+1)x^2 - (3m^2 + 7m - 1)x + m^2 - 1$$

đạt cực tiểu tại một điểm có hoành độ < 1 (Đề A, B, D, 1987).

Giải: Tính $y' = -3x^2 + 6(m+1)x - (3m^2 + 7m - 1)$.

Để hàm số có cực tiểu (do đó có cực đại vì đồ thị hàm số này luôn có tâm đối xứng) thì y' phải có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

Xét dấu y' :	x	x_1			x_2		
	y'	-	0	+	0	-	

Bảng 17

Rõ ràng nghiệm nhỏ x_1 là hoành độ điểm cực tiểu: hoành độ cực tiểu < 1 khi xảy ra một trong hai khả năng:

$$x_1 < 1 < x_2,$$

$$x_1 < x_2 \leq 1$$

Cách 1. Tính $\Delta' = 9(m+1)^2 - 3(3m^2 + 7m - 1) = -3m + 12$.

Hoành độ cực tiểu < 1 khi thỏa mãn 1 trong 2 điều kiện sau:

$$\begin{aligned} -3.y'(1) < 0 &\Rightarrow -3[-3 + 6(m+1) - (3m^2 + 7m - 1)] < 0 \\ &\Rightarrow 3m^2 + m - 4 < 0 \Rightarrow -4/3 < m < 1. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Hoặc } \begin{cases} \Delta' = -3m + 12 > 0 \\ -3.y'(1) \geq 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} = m + 1 < 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \leq -\frac{4}{3}, m \geq 1 \Leftrightarrow m \leq -\frac{4}{3} \\ m < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Gộp 2 đoạn nghiệm (1) và (2) ta được $m < 1$.

Cách 2: (Phương pháp gián tiếp). Trước hết xác định các giá trị m làm cho hàm số không có cực tiểu có hoành độ < 1 .

Điều đó xảy ra khi hàm số không có cực trị hoặc các cực trị đều có hoành độ ≥ 1 . Sau đó loại bỏ những giá trị m đó, ta sẽ được m cần tìm.

Hàm số không có cực trị nếu

$$\Delta' = -3m + 12 \leq 0 \Rightarrow m \geq 4. \quad (3)$$

Hoặc cả 2 cực trị đều có hoành độ ≥ 1 , tức là khi thỏa mãn

$$\begin{cases} \Delta' = -3m + 12 > 0 \\ -3y'(1) \geq 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ 3m^2 + m - 4 \geq 0 \\ m + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m \leq \frac{4}{3}, m \geq 1 \\ m > 0 \end{cases}$$

Suy ra $1 \leq m < 4$.

(4)

Gộp 2 đoạn nghiệm (3) và (4) sẽ được $m \geq 1$.

Vậy với $m < 1$ hàm số có cực tiểu tại một điểm có hoành độ < 1 .

Cách 3. Tìm trực tiếp các nghiệm x_1, x_2 . Với $m < 1$ thì $\Delta' > 0$.

$$\text{ta có } x_{1,2} = \frac{-3(m+1) \pm \sqrt{-3m+12}}{-3} = m+1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{12-3m}.$$

m cần tìm phải thỏa mãn một trong 2 điều kiện sau đây:

$$\begin{cases} \Delta' = -3m + 12 > 0 \\ x_1 = m + 1 - \frac{1}{3}\sqrt{12-3m} < 1 \\ x_2 = m + 1 + \frac{1}{3}\sqrt{12-3m} \geq 1 \end{cases} \quad (5)$$

Hoặc

$$\begin{cases} \Delta' = -3m + 12 > 0 \\ x_2 = m + 1 + \frac{1}{3}\sqrt{12-3m} \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

Giải các hệ (5) và (6) rồi gộp nghiệm lại sẽ được $m < 1$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = (x-a)(x-b)(x-c)$, với $a < b < c$. Chứng minh rằng hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu, đồng thời điểm cực đại thuộc khoảng (a, b) , còn điểm cực tiểu thuộc khoảng (b, c) .

Giải: Ta có $y' = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$.

Vậy: $y'(a) = (a-b)(a-c) > 0$,

$y'(b) = (b-c)(b-a) < 0$,

$y'(c) = (c-a)(c-b) > 0$.

Từ đó suy ra tam thức y' có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ và $a < x_1 < b; b < x_2 < c$.

Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	a	x_1	b	x_2	c	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y			M		m		

Bảng 18

Vậy hàm số luôn luôn có cực đại, cực tiểu và điểm cực đại của hàm số thuộc khoảng (a, b) còn điểm cực tiểu của hàm số thuộc khoảng (b, c).

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 1 - m$.

a) Với những giá trị nào của m thì hàm số có cực đại, cực tiểu?

b) Giả sử đồ thị của hàm số có cực đại tại $M_1(x_1, y_1)$ và có cực tiểu tại $M_2(x_2, y_2)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{y_1 - y_2}{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 1)} = 2.$$

Giải. a) ta có $y' = 3(x^2 - 2x + m)$. Muốn hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu thì y' phải có 2 nghiệm phân biệt, tức là ta phải có:

$$\Delta' = 1 - m > 0, \text{ hay là } m < 1. \quad (1)$$

b) Giả sử điều kiện (1) được thỏa mãn. Khi đó, đồ thị của hàm số có cực đại $M_1(x_1, y_1)$ và cực tiểu $M_2(x_2, y_2)$, trong đó x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là các nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 2x + m = 0.$$

Ta có $y_1 = y(x_1) = x_1^3 - 3x_1^2 + 3mx_1 + 1 - m$,

$$y_2 = y(x_2) = x_2^3 - 3x_2^2 + 3mx_2 + 1 - m.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } y_1 - y_2 &= (x_1^3 - x_2^3) - 3(x_1^2 - x_2^2) + 3m(x_1 - x_2) \\ &= (x_1 - x_2) [x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 3m] \\ &= (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 3m] \\ &= (x_1 - x_2)(4 - m - 6 + 3m) \text{ (theo hệ thức Viét)} \\ &= 2(x_1 - x_2)(m - 1) \\ &= 2(x_1 - x_2)(x_1x_2 - 1). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \frac{y_1 - y_2}{(x_1 - x_2)(x_1x_2 - 1)} = 2.$$

BÀI TẬP

1. Với những giá trị nào của m thì hàm số:

$$y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$$

chỉ có cực tiểu và không có cực đại.

2. Cho hàm số: $y = \frac{x^2 - mx + m}{x - 1}$.

a) Chứng minh rằng với mọi m hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu, đồng thời hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số không phụ thuộc m .

b) Xác định m sao cho tích các giá trị cực trị của hàm số là nhỏ nhất.

3. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) Xác định a, b, c sao cho hàm số bằng 0 khi $x = 1$ và hàm số đạt cực trị bằng 0 khi $x = -2$.

b) Tìm liên hệ giữa a, b, c sao cho hàm số có cực đại, cực tiểu tại các điểm x_1, x_2 , đồng thời $x_1 < 1 < x_2$.

4. Tìm một đa thức bậc ba $y = P(x)$, biết rằng nó các giá trị cực đại bằng 2 khi $x = 1$ và khi chia đa thức ấy cho $x^2 + x + 1$ thì được phần dư là $5(3x + 1)$.

5. Chứng minh rằng với mọi $a \neq 0$, hàm số

$$y = \frac{x^2 + (a+1)x + 2}{x^2 + x + 1} \text{ luôn luôn có cực đại, cực tiểu.}$$

6. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx + 2}{x - 1}$

Với những giá trị nào của m thì hàm số có cực đại và cực tiểu? xác định m sao cho điểm cực tiểu của đồ thị nằm trên Parabol $y = x^2 + x - 4$.

b) *Tiếp cận của một đường cong.*

1. *Tiếp cận đứng.* Đường thẳng $x = a$ (song song với trục tung) được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nếu xảy ra (ít nhất) một trong các khả năng sau:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

$$x \rightarrow a$$

$$x > a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

$$x \rightarrow a$$

$$x < a$$

Ví dụ 1. Tìm các tiệm cận đứng của đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x+1}{x-2}$; b) $y = \frac{x-3}{x^2-3x+2}$; c) $y = \tan x$.

Giải. a) Vì $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-2} = \infty$ (*), nên đồ thị của hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$.

(*) Ở đây, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{2x+1}{x-2} = +\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2x+1}{x-2} = -\infty$.

Trong các ví dụ sau, bạn đọc tự kiểm tra giới hạn về từng phía.

b) Hàm số đã cho có dạng $y = \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \infty$$

nên đồ thị của hàm số đã cho có hai đường tiệm cận đứng, đó là đường thẳng $x = 1$ và $x = 2$.

c) Đồ thị của hàm số $y = \tan x$ có vô số tiệm cận đứng, đó là các đường thẳng $x = \pi/2 + k\pi$ (k nguyên).

2. *Tiệm cận ngang.* Đường thẳng $y = a$ (song song với trục hoành) được gọi là *tiệm cận ngang về bên trái* của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$.

Đường thẳng $y = a$ được gọi là *tiệm cận ngang về bên phải* của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ thì đường thẳng $y = a$ được gọi là *tiệm cận ngang* của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 2. Tìm các đường tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ (} c \neq 0 \text{); b) } y = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1}.$$

$$\text{Giải. a) Vì } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} = \frac{a}{c}$$

nên đường thẳng $y = \frac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

$$\text{b) Vì } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 3$$

nên đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị của hàm số đã cho.

3. Tiệm cận xiên. Đường thẳng $y = ax + b$ được gọi là *tiệm cận xiên về bên trái* của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Và được gọi là *tiệm cận xiên về bên phải* của đồ thị hàm số đó nếu:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Nếu

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

thì đường thẳng $y = ax + b$ được gọi là *tiệm cận xiên* của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Trong trường hợp tiệm cận xiên $y = ax + b$ có hệ số góc $a = 0$, thì nó trở thành tiệm cận ngang.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = Ax + B + \frac{C}{px + q}$ với $p \neq 0$

Chúng minh rằng đường thẳng $y = Ax + B$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho nếu $A \neq 0$. Còn nếu $A = 0$, thì đường thẳng đó là tiệm cận ngang.

Giải: ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} [Ax + B + \frac{C}{px + q} - (Ax + B)] =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{px + q} = 0.$$

Từ đó, theo định nghĩa, ta được điều cần phải chứng minh.

Chú ý. Đối với hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ ($p \neq 0$), để tìm tiệm cận xiên

của nó ta viết lại hàm số dưới dạng $y = Ax + B + \frac{C}{px + q}$

Đường thẳng $y = Ax + B$ chính là tiệm cận xiên cần tìm.

Đối với hàm số $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a > 0$): $\Delta = b^2 - 4ac$

Có thể viết $y' = \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}}$

Xét $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\sqrt{a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}} - \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \right] =$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{\Delta}{4a}}{\sqrt{a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}} + \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|} = 0$$

Từ đây $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\sqrt{a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}} + \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \right] = 0$

hay là đường thẳng $y = \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right)$ là tiệm cận trái của đồ thị:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}} + \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right) \right] = 0$$

Tức là đường thẳng $y = \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right)$ là tiệm cận phải của đồ thị.

Đối với hàm số $y = Ax + B + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ thì tiệm cận trái của đồ thị của nó là:

$y = Ax + B - \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = (A - \sqrt{a})x + \left(B - \frac{b\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \right)$ và tiệm cận phải sẽ là

$y = Ax + B + \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = (A + \sqrt{a})x + \left(B + \frac{b\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} \right) =$

$$\begin{aligned}
& \text{Vì } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left\{ y - \left[Ax + B \pm \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)} \right] \right\} = \\
& = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left\{ \sqrt{ax^2 + bx + c} + Ax + B - \left[Ax + B \pm \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)} \right] \right\} \\
& = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{a \left(x + \frac{b}{2a} \right)} \right] = 0 \text{ (theo chứng minh trên).}
\end{aligned}$$

Ví dụ 4. Xác định các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

$$y = x - \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Giải. Hàm số có thể viết dưới dạng

$$y = x - \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Xét đường $y = x - \left|x + \frac{1}{2}\right|$, khi đó

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(x - \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right) - \left(x - \left|x + \frac{1}{2}\right| \right) \right] = \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left|x + \frac{1}{2}\right| - \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right] = \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3/4}{\left|x + 1/2\right| + \sqrt{\left(x + 1/2\right)^2 + 3/4}} = 0
\end{aligned}$$

Vậy $y = x - \left|x + \frac{1}{2}\right|$ là đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho :

$$y = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}, & x < -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy ta có tiệm cận trái ($x \rightarrow -\infty$) của đồ thị là $y = 2x + \frac{1}{2}$ (tiệm cận xiên bên trái) và tiệm cận phải ($x \rightarrow +\infty$) của đồ thị

là $y = -\frac{1}{2}$ (tiệm cận ngang bên phải).

4. Tiệm cận cong. Ngoài các tiệm cận tuyến tính (tiệm cận đứng, ngang, xiên) có nhiều bài toán cần xác định các đường tiệm cận là những đường cong đơn giản.

Ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 5. Xác định các đường tiệm cận của đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^3}{x-1}.$$

Giải: Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$ vì

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{x-1} = \infty.$$

$$\text{Ta có } y = \frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{x-1} - (x^2 + x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Vậy đường cong $y = x^2 + x + 1$ là tiệm cận bậc hai của đồ thị của hàm số đã cho.

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

Xác định a, b, c, d biết rằng đồ thị của hàm số đi qua điểm $(0, 3/2)$ và nhận điểm $(2, 2)$ là giao điểm của hai tiệm cận.

2. Xác định hàm số $y = \frac{ax^2+bx+c}{px+q}$,

biết rằng đồ thị của hàm số có các tính chất sau đây:

- a) Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.
 b) Tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 3$.
 c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2, 6)$.

3. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x + m}$.

- a) Xác định m để đồ thị của hàm số có tiệm cận xiên đi qua điểm $(1, 1)$.
 b) Xác định m để giao điểm của hai tiệm cận nằm trên Parabol $y = x^2$.

4. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

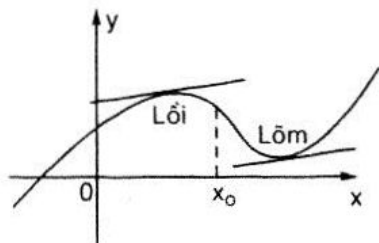
a) $y = \frac{2x^3 + 3x + 1}{x^2 - 4x + 3}$; b) $y = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^2 + 1}$;

c) $y = x + \sqrt{x^2 - x + 1}$; d) $y = x + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) *Tính chất lồi lõm và điểm uốn của đường cong.*

Đường cong $y = f(x)$ được gọi là lồi trong khoảng (a, b) nếu đường cong hoàn toàn nằm bên dưới tiếp tuyến bất kỳ của nó trong khoảng ấy.

Đường cong $y = f(x)$ được gọi là lõm trong khoảng (a, b) nếu đường cong hoàn toàn nằm bên trên tiếp tuyến bất kỳ của nó trong khoảng ấy.



Hình 24

* Điểm $U(x_0, y_0)$ thuộc đường cong, phân cách cung lồi và lõm được gọi là điểm uốn của đường cong.

Ta có định lý sau đây:

Định lý: Cho hàm $y = f(x)$ xác định trên (a, b) và có đạo hàm bậc hai trên khoảng đó.

1) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc (a, b) , thì đường cong $y = f(x)$ lõm trong khoảng (a, b) .

2) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc (a, b) , thì đường cong $y = f(x)$ lồi trong khoảng (a, b) .

3) Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua x_0 thì đường cong $y = f(x)$ có điểm uốn là $U(x_0, f(x_0))$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2$ ($a \neq 0$). a) Xác định a và b sao cho điểm uốn của đồ thị của hàm số nằm trên trục tung. b) Xác định a và b sao cho đồ thị của hàm số nhận điểm $(1, -2)$ là điểm uốn.

Giải: Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx$; $y'' = 6ax + 2b$, y'' là nhị thức bậc nhất, $y'' = 0$ khi $x_0 = -\frac{b}{3a}$ và đổi dấu khi x đi qua điểm đó. Vậy x_0 là hoành độ của điểm uốn.

a) Muốn điểm uốn nằm trên trục tung, ta phải có:

$$x_0 = 0 \text{ hay là } b = 0.$$

b) Muốn đồ thị nhận điểm $(1, -2)$ làm điểm uốn ta cần phải có:

$$\begin{cases} y(1) = -2 \\ y''(1) = 0. \end{cases}$$

$$\text{hay là: } \begin{cases} a + b = -2 \\ 6a + 2b = 0. \end{cases}$$

Hệ này cho nghiệm $a = 1, b = -3$.

Bài tập: Xác định điểm uốn của đồ thị của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = x^3 - 3x^2 + 1; \text{ b) } \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x + 3.$$

d) Một phương pháp tính giá trị đa thức $y = f(x)$ tại $x = x_0$ trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$, $g(x)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn bậc của $f(x)$.

Trong quá trình khảo sát và vẽ đồ thị hàm số, chúng ta thường phải tính giá trị hàm số $y = f(x)$ tại các điểm cực trị (hoặc điểm uốn). Những điểm này có hoành độ là nghiệm của

phương trình $f'(x) = 0$ (hoặc $f''(x) = 0$). Nếu nghiệm đó tìm được là những số nguyên hoặc phân số đơn giản, chúng ta chỉ cần thay vào biểu thức hàm số sẽ được giá trị hàm số tương ứng. Nhưng trong trường hợp các nghiệm đó là một biểu thức phức tạp, khi thay vào biểu thức hàm số sẽ rất cồng kềnh, tính toán phức tạp. Phương pháp sau đây giúp chúng ta tính toán đơn giản hơn.

Cách làm: Bằng cách chia đa thức, có thể phân tích

$$f(x) = A(x)g(x) + B(x).$$

Trong đó phần dư $B(x)$ có bậc nhỏ hơn bậc của $g(x)$ do đó cũng nhỏ hơn bậc của $f(x)$.

Vì $g(x_0) = 0$ nên $f(x_0) = B(x_0)$.

Ví dụ 1. Tìm tung độ các điểm cực trị của hàm số.

$$y = x^3 + 3x^2 - 4x + 1.$$

Giải: Tính $y' = 3x^2 + 6x - 4$.

Cho $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 4 = 0$. Giải phương trình này, chúng ta được hai hoành độ của 2 điểm cực trị:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{3}.$$

Rõ ràng nếu thay trực tiếp các $x_{1,2}$ này vào biểu thức hàm số thì tính toán sẽ rất phức tạp. Ta làm như sau:

Lấy biểu thức hàm số chia cho biểu thức đạo hàm :

$3x^2 + 6x - 4$ được đa thức thương là $\frac{1}{3}(x+1)$ và dư là $-\frac{14}{3}x + \frac{7}{3}$ (bạn đọc tự kiểm tra). Do đó:

$$x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = \frac{1}{3}(x+1)(3x^2 + 6x - 4) - \frac{14}{3}x + \frac{7}{3} \quad \text{hay là}$$

$$y(x) = \frac{1}{3}(x+1)y'(x) - \frac{14}{3}x + \frac{7}{3}. \quad \text{Vì } y'(x_{1,2}) = 0 \text{ do đó}$$

$$y\left(\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{3}\right) = -\frac{14}{3}\left(\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{3}\right) + \frac{7}{3} = 7 \mp \frac{14\sqrt{21}}{9}.$$

Ví dụ 2. Tính giá trị tung độ điểm uốn của đồ thị hàm số:

$$y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1.$$

Giải: Tính $y' = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$.

$$y'' = 12x^2 - 24x - 4.$$

$$\text{Cho } y'' = 0 \Rightarrow 12x^2 - 24x - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{12}}{3}.$$

Bằng cách chia biểu thức hàm số y cho biểu thức đạo hàm bậc hai y'' ta có thể viết (bạn đọc tự kiểm tra):

$$y(x) = \left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{17}{36}\right) y''(x) - \frac{26}{9}.$$

$$\text{Nhớ rằng } y''(x_{1,2}) = 0 \text{ nên: } y(x_{1,2}) = y\left(\frac{3 \pm \sqrt{12}}{3}\right) = -\frac{26}{9}.$$

Hai điểm uốn có tung độ bằng nhau và bằng $-\frac{26}{9}$.

Ví dụ 3. Tính tung độ các điểm cực trị của hàm số:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}.$$

$$\text{Giải: Tính } y' = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x - 1)^2}.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

$x_{1,2}$ là hoành độ của các điểm cực trị. Để tính giá trị tung độ tại các điểm đó, ta tính riêng giá trị tử số và giá trị mẫu số tại các điểm ấy. Dễ dàng tính được giá trị mẫu số $x - 1$ tại $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$ là $\pm \sqrt{3}$.

Còn lại, cần tính giá trị tử số, tức là giá trị biểu thức $x^2 - 3x + 5$ tại $x_{1,2}$. Nhớ rằng $x_{1,2}$ là nghiệm của $x^2 - 2x - 2 = 0$ nên ta lấy $(x^2 - 3x + 5)$ chia cho $(x^2 - 2x - 2)$ được phần dư là $-x + 7$. Vì vậy có thể viết:

$$\begin{aligned}(x^2 - 3x + 5) &= (x^2 - 2x - 2) - x + 7, \\(x^2 - 3x + 5)|_{x=x_{1,2}} &= (x^2 - 2x - 2)|_{x_{1,2}} + 7 = 7 - x_{1,2} \\x &= x_{1,2} \qquad x &= x_{1,2}\end{aligned}$$

$$\text{hay } (x^2 - 3x + 5)|_{x=x_{1,2}} = 6 \mp \sqrt{3}.$$

Vậy giá trị tung độ tại các điểm $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$ là

$$y(1 \pm \sqrt{3}) = \frac{6 \mp \sqrt{3}}{\pm \sqrt{3}} = \pm 2\sqrt{3} \mp 1.$$

Chú ý. Cách làm này còn cho phép chúng ta giải quyết một số bài toán dạng sau đây:

1) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Giả sử hàm số có cực đại, cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu.

Giải: Tính $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Giả sử $y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 . Có thể viết $y(x)$ dưới dạng:

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{b}{9a}\right)y'(x) + \frac{2}{3}\left(c - \frac{b}{3a}\right)x + \left(d - \frac{bc}{9a}\right).$$

$$y_1 = y(x_1) = \frac{2}{3}\left(c - \frac{b}{3a}\right)x_1 + \left(d - \frac{bc}{9a}\right).$$

$$y_2 = y(x_2) = \frac{2}{3}\left(c - \frac{b}{3a}\right)x_2 + \left(d - \frac{bc}{9a}\right).$$

Rõ ràng tọa độ các điểm cực trị $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ thỏa mãn phương trình

$$y = \frac{2}{3}\left(c - \frac{b}{3a}\right)x + \left(d - \frac{bc}{9a}\right).$$

Vậy đó chính là phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu.

Bằng cách hoàn toàn tương tự, bạn đọc có thể giải được các bài toán dạng sau đây.

2) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a \neq 0$).

a) Giả sử đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Viết phương trình Parabôn đi qua 3 điểm cực trị đó.

b) Giả sử đồ thị hàm số có 2 điểm uốn. Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm uốn đó.

II. Những hàm số thường gặp

Vì các hàm số bậc nhất và bậc hai đã được học nhiều ở các lớp dưới, nên ở đây chúng ta không đề cập thêm đến các hàm số ấy.

1. Khảo sát hàm bậc ba.

Dạng tổng quát: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

1) *Khoảng xác định*: Hàm số xác định với mọi x .

2) *Chiều biến thiên*: Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Đạo hàm y' là một tam thức bậc hai với $\Delta' = b^2 - 3ac$.

Có ba khả năng có thể xảy ra:

(α) $\Delta' < 0$: Lúc đó y' luôn luôn dương, hoặc luôn luôn âm (tùy theo dấu của a). Vậy hàm số luôn luôn đồng biến hoặc luôn luôn nghịch biến.

(β) $\Delta' = 0$: Lúc đó y' có nghiệm kép $x_0 = -\frac{b}{3a}$ và $y' \leq 0$ với mọi x , hoặc $y' \geq 0$ với mọi x (tùy theo dấu của a). Vậy trong trường hợp này ta cũng có y luôn luôn đồng biến hoặc luôn luôn nghịch biến.

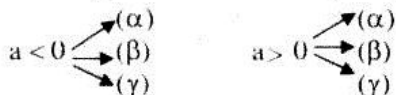
(γ) $\Delta' > 0$: Lúc đó y' có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$). Căn cứ vào định lý về dấu của tam thức, dễ thấy tại x_1, x_2 đạo hàm bằng 0 và đổi dấu nên x_1, x_2 chính là hoành độ các cực trị.

3) *Điểm uốn*: Ta có $y'' = 6ax + 2b$.

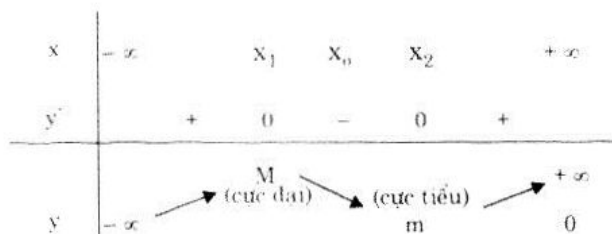
$y'' = 0$, khi $x = -\frac{b}{3a} = x_0$.

y'' đổi dấu khi x đi qua x_0 nên x_0 là hoành độ điểm uốn của đồ thị.

4) *Bảng biến thiên*. Chú ý rằng có thể xảy ra sáu khả năng:



nên có thể xảy ra sáu khả năng về bảng biến thiên. Ở đây, ta lập một mẫu bảng biến thiên ứng với trường hợp $a > 0$ và khả năng (γ):



Bảng 19

5) **Đồ thị:** Từ các kết quả trên, suy ra đồ thị của hàm số có và chỉ có một trong sáu dạng cơ bản (xem hình 25a, 25b).

Nhận xét:

* Đồ thị của hàm số bậc ba luôn luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm (điều này tương đương với phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ có ít nhất một nghiệm).

* Đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Điều này tương đương với hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu.

* Điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị (học sinh tự chứng minh lấy kết quả này).

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 + m(x^2 - 1)$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 3$.

b) Với những giá trị nào của m , thì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

c) Xác định giá trị m sao cho $|y| \leq 1$, khi $|x| \leq 1$.

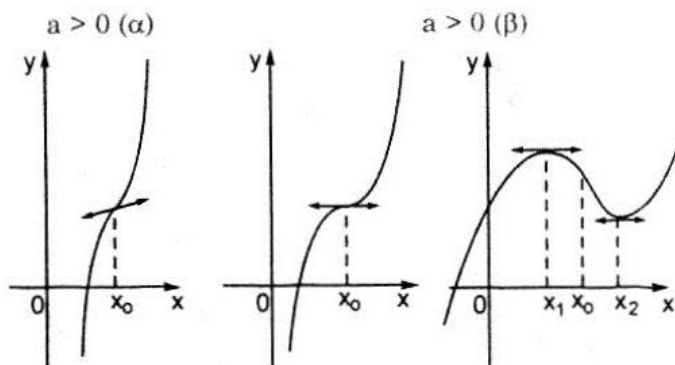
Giải: a) Khi $m = 3$ hàm số có dạng $y = x^3 + 3x^2 - 3$.

Khoảng xác định: Hàm số xác định với mọi x .

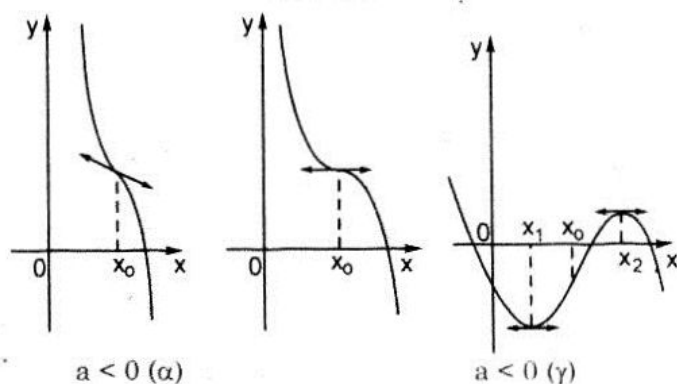
Chiều biến thiên: Ta có $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$;

$$y' = 0, \text{ khi } x = 0 \text{ và } x = -2;$$

$$y' > 0, \text{ khi } x < -2 \text{ hoặc } x > 0,$$



Hình 25a



Hình 25b

trong các khoảng này hàm số đồng biến :

$y' < 0$, khi $-2 < x < 0$.

trong khoảng này hàm số nghịch biến.

Vậy hàm số đạt cực đại bằng 1 khi $x = -2$ và đạt cực tiểu bằng -3 khi $x = 0$.

Điểm uốn. Ta có $y'' = 6x + 6$;

$y'' = 0$ và đổi dấu khi $x = -1$.

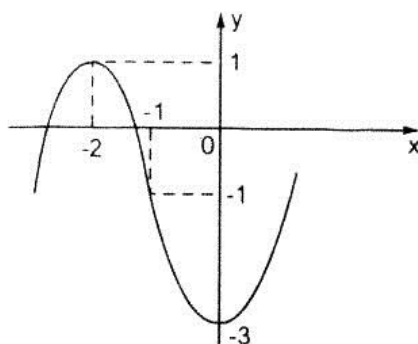
Vậy đồ thị hàm số có điểm uốn là $(-1, -1)$.

Bảng biến thiên. Căn cứ vào các kết quả trên ta có bảng biến thiên sau đây:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	1	-1	-3	$+\infty$
		M		m	

Bảng 20

Vẽ đồ thị



Hình 26

Nhận xét: Điểm uốn $(-1, -1)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

b) Để đồ thị cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt thì hàm số phải có cực đại, cực tiểu và giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2mx = x(3x + 2m)$

$$y' = 0 \text{ khi } x_1 = 0 \text{ và } x_2 = -\frac{2m}{3}.$$

Nhận thấy rằng với $m \neq 0$, thì y' có hai nghiệm phân biệt, lúc đó hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu.

Đồng thời $x_1 = 0$ và $x_2 = -\frac{2m}{3}$ là hoành độ các cực trị.

Ta cần phải có: $y(0).y(-\frac{2m}{3}) < 0$.

Ta có $y(0) = -m, y(-\frac{2m}{3}) = \frac{4m^3}{27} - m$.

Ta có $y(0).y(-\frac{2m}{3}) = -m(\frac{4m^3}{27} - m) =$
 $= \frac{27m^2 - 4m^4}{27}$, và $y(0).y(-\frac{2m}{3}) < 0$ tương đương với
 $m^2(27 - 4m^2) < 0$, hay là $27 - 4m^2 < 0$ (do $m \neq 0$), hay là

$$|m| > \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy với $|m| > \frac{3\sqrt{3}}{2}$, thì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

c) Ta phải có $|y(0)| \leq 1$, hay là $|-m| \leq 1$, hay là $-1 \leq m \leq 1$.

Ta sẽ chứng minh rằng đây cũng là điều kiện đủ để thỏa mãn yêu cầu bài toán, tức là nếu $|m| \leq 1$, thì $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

Thật vậy, với $m = 0$, thì hiển nhiên đúng. Với $m \neq 0$, thì như ta đã biết ở phần trên hàm số đã cho có cực trị tại $x_1 = 0$ và $x_2 = -\frac{2m}{3}$. Ta dễ dàng thấy rằng $|\frac{2m}{3}| \leq 1$ khi $|m| \leq 1$ nên cả hai hoành độ của cực trị của hàm số đều thuộc đoạn $[-1, 1]$. Vậy muốn thỏa mãn yêu cầu bài toán ta chỉ cần có:

$$\begin{cases} |y(-1)| \leq 1. & (1) \\ |y(1)| \leq 1. & (2) \\ |y(0)| \leq 1. & (3) \\ |y(-2m/3)| \leq 1 & (4) \end{cases}$$

Các điều kiện (1), (2), (3) hiển nhiên thỏa mãn. Ta chứng minh rằng điều kiện (4) cũng thỏa mãn.

Tức là ta sẽ chứng minh $\left| \frac{4m^3}{27} - m \right| \leq 1$, khi $|m| \leq 1$.

Thật vậy:

a) nếu $0 < m \leq 1$:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{4m^3}{27} - m > -m > -1, \\ \frac{4m^3}{27} - m < \frac{4m^3}{27} < 1 \end{cases}$$

$$\text{hay là } \left| \frac{4m^3}{27} - m \right| \leq 1.$$

β) Nếu $-1 \leq m < 0$:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{4m^3}{27} - m > \frac{4m^3}{27} > -1, \\ \frac{4m^3}{27} - m < -m \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{hay là } \left| \frac{4m^3}{27} - m \right| \leq 1.$$

Tóm lại, với $|m| \leq 1$, thì $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 2$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số. Gọi đồ thị ấy là (C)

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M_0 có hoành độ x_0 . Tiếp tuyến này cắt lại (C) tại điểm M_1 . Tính hoành độ của M_1 theo x_0 .

c) Cho 3 điểm E, F, G thẳng hàng trên (C) có hoành độ lần lượt là a, b, c. Gọi E_1 , F_1 , G_1 là giao điểm của các tiếp tuyến đó với (C) ($E_1 \neq E$, $F_1 \neq F$, $G_1 \neq G$). Chứng minh rằng E_1 , F_1 , G_1 thẳng hàng.

Giải: a) Bạn tự khảo sát và vẽ đồ thị.

b) Gọi tung độ điểm M_0 là y_0 , khi đó $y_0 = x_0^3 - 3x_0 - 2$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M_0 là:

$$y - (x_0^3 - 3x_0 - 2) = (3x_0^2 - 3)(x - x_0).$$

Gọi (x_1, y_1) là tọa độ điểm M_1 . Vì M_1 vừa nằm trên (C) vừa nằm trên tiếp tuyến trên nên:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^3 - 3x_1 - 2 \\ y_1 - (x_0^3 - 3x_0 - 2) = (3x_0^2 - 3)(x_1 - x_0) \end{cases} \quad (1)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$(x_1^3 - 3x_1 - 2) - (x_0^3 - 3x_0 - 2) = (3x_0^2 - 3)(x_1 - x_0)$$

Sau khi rút gọn ta được:

$$(x_1 - x_0)^2 (x_1 + 2x_0) = 0$$

Vì $M_1 \neq M_0$, nên $x_1 - x_0 \neq 0$, suy ra $x_1 = -2x_0$.

c) Theo câu b) ở trên nếu E, F, G có hoành độ lần lượt là a, b, c thì E_1, F_1, G_1 có hoành độ tương ứng là $-2a, -2b, -2c$. Theo giả thiết E, F, G thẳng hàng nên:

$$\frac{y(a) - y(b)}{a - b} = \frac{y(b) - y(c)}{b - c}$$

hay là:

$$\frac{(a^3 - 3a - 2) - (b^3 - 3b - 2)}{a - b} = \frac{(b^3 - 3b - 2) - (c^3 - 3c - 2)}{b - c}$$

Do E, F, G từng đôi một không trùng nhau nên $a - b \neq 0$ và $b - c \neq 0$.

Từ đây suy ra $a^2 + ab = c^2 + bc$.

Để chứng minh E_1, F_1, G_1 thẳng hàng, cần chứng minh:

$$\frac{y(-2a) - y(-2b)}{-2a + 2b} = \frac{y(-2b) - y(-2c)}{-2b + 2c}$$

$$\text{hay là: } \frac{-8a^3 + 6a + 8b^3 - 6b}{-2a + 2b} = \frac{-8b^3 + 6b + 8c^3 - 6c}{-2b + 2c}$$

Điều này tương đương với $4b^2 + 4a^2 + 4ab = 4c^2 + 4b^2 + 4bc$ hay là $a^2 + ab = c^2 + bc$. Điều đó đã có (xem (*)) do E, F, G thẳng hàng. Vậy E_1, F_1, G_1 thẳng hàng.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 9x + 4$.

a) Với những giá trị nào của m thì hàm số có cực đại, cực tiểu? Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu.

b) Với những giá trị nào của m , thì trên đồ thị của hàm số có một cặp điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

c) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -\frac{15}{2}$. Hãy chỉ rõ các giao điểm của đồ thị với trục hoành.

Giải: a) Ta có $y' = 3x^2 + 2mx + 9$.

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì y' phải có hai nghiệm phân biệt, tức là phải có:

$$\Delta' = m^2 - 27 > 0 \text{ hay là } |m| > \sqrt{27}.$$

Cách 1: Với $|m| > \sqrt{27}$ hàm số có cực trị. Giả sử các điểm cực trị đó là (x_1, y_1) và (x_2, y_2) . Bằng cách chia đa thức có thể viết:

$$x^3 + mx^2 + 9x + 4 = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}m\right)(3x^2 + 2mx + 9) + \left(6 - \frac{2}{9}m^2\right)x + (4 - m)$$

$$\text{Hay là } y(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}m\right)y'(x) + \left(6 - \frac{2}{9}m^2\right)x + (4 - m).$$

Để ý rằng $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$ và $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$ nên ta có

$$y_1 = \left(6 - \frac{2}{9}m^2\right)x_1 + (4 - m), y_2 = \left(6 - \frac{2}{9}m^2\right)x_2 + (4 - m).$$

Điều này chứng tỏ hai điểm (x_1, y_1) , (x_2, y_2) cùng thỏa mãn phương trình đường thẳng $y = \left(6 - \frac{2}{9}m^2\right)x + (4 - m)$.

Vậy đó chính là phương trình đường thẳng cần tìm.

Cách 2. Nếu x là hoành độ của điểm cực trị thì tại đó $y' = 0$.

tức là $3x^2 + 2mx + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{2m}{3}x - 3$ (*). Nhân 2 vế (*) với x ta

được $x^3 = -\frac{2m}{3}x^2 - 3x = -\frac{2m}{3}\left(-\frac{2m}{3}x - 3\right) - 3x = (4m^2/9 - 3)x + 2m$ (**).

Thay các biểu thức (*) và (**) của x^2 và x^3 vào biểu thức hàm số ta được $y = (6 - \frac{2}{9}m^2)x + (4 - m)$. Đây là hệ thức bậc nhất liên hệ giữa x và y tại điểm cực đại và cực tiểu nên nó là phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu.

Nhận xét: Phương pháp này tránh được phép chia đa thức trong trường hợp phép chia ấy phức tạp.

Cách 3: Cũng có thể tìm cụ thể biểu thức của các tọa độ các điểm cực trị:

$$x_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 27}}{3}, \quad y_1 = y(x_1);$$

$$x_2 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 27}}{3}, \quad y_2 = y(x_2).$$

rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó theo công thức:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Nhận xét: Phương pháp này thường cồng kềnh. Bạn đọc tự giải theo phương pháp này để so sánh với các phương pháp trình bày ở trên.

Cách 4. Cũng như cách 3, trước hết tìm tọa độ của các điểm cực trị (x_1, y_1) và (x_2, y_2) .

Gọi đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$ khi đó:

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b. \end{cases}$$

Từ đây ta sẽ xác định được a và b .

Cách này cũng chỉ dùng khi việc tính $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ đơn giản và biểu thức của chúng không phức tạp.

b) Giả sử rằng trên đồ thị của hàm số có hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ. Hai điểm đó là

(x_0, y_0) và $(-x_0, -y_0)$ với $x_0 \neq 0$.

Ta có $y_0 = x_0^3 + mx_0^2 + 9x_0 + 4$, vì $-y_0 = y(-x_0)$ nên

$$-y_0 = -x_0^3 + mx_0^2 - 9x_0 + 4.$$

Ta phải có $y_0 = -(-y_0)$. Như vậy x_0 chính là nghiệm của phương trình $x^3 + mx^2 + 9x + 4 = x^3 - mx^2 + 9x - 4$.

hay là $mx^2 = -4$. Để phương trình này có nghiệm ta phải có $m < 0$ (khi đó $x_0 = \pm \sqrt{-\frac{4}{m}}$).

Vậy với $m < 0$ thì trên đồ thị của hàm số có một cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

c) Với $m = -\frac{15}{2}$ hàm số có dạng

$$y = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 9x + 4.$$

Bạn đọc tự làm phần này coi như một bài tập.

Chú ý: Trong khi vẽ đồ thị của hàm số bậc ba, việc xét giao điểm của đồ thị với trục hoành không phải đơn giản, vì cần giải phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Thành thử, trừ trường hợp phương trình này thuộc loại "dễ giải" ta phải chỉ rõ các giao điểm. còn trong trường hợp chúng không đòi hỏi phải xác định rõ giao điểm của đồ thị với trục hoành, chúng ta chỉ quan tâm tới dáng điệu của đồ thị hàm số.

Trong ví dụ trên đồ thị cắt trục hoành tại $x = 2$ và $x = \frac{11 \pm \sqrt{153}}{4}$.

Ví dụ 4. a) Chứng minh rằng, nếu x_0 là một nghiệm của phương trình $x^3 + x - 1 = 0$ thì ta có $x_0^2 - x_0 < 0$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 + x - 1$.

Kiểm tra lại kết quả ở câu a.

c) Chứng minh rằng phương trình $x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ chỉ có một nghiệm thực.

Giải: a) Cách 1. Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình đã cho thì $x_0^3 + x_0 - 1 = 0$ suy ra $x_0(x_0^2 + 1) = 1$ và $x_0 \neq 0$.

Vì $x_0^2 + 1 > 0$ mà $x_0(x_0^2 + 1) = 1 > 0 \Rightarrow x_0 > 0$.

Mặt khác $x_0^2 + 1 > 1$ nên $x_0 = \frac{1}{x_0^2 + 1} < 1$.

Vậy $0 < x_0 < 1$, do đó tam thức bậc hai $x_0^2 - x_0 < 0$.

Cách 2. Xét phương trình $x(x^2 + 1) = 1$.

Nếu $x \leq 0$ thì nó không thể là nghiệm của phương trình vì khi đó vế trái ≤ 0 , vế phải bằng 1.

Nếu $x \geq 1$ thì vế trái > 1 còn vế phải bằng 1 nên cũng không thể là nghiệm. Vậy nếu x_0 là nghiệm của phương trình đã cho thì $0 < x_0 < 1$, do đó $x_0^2 - x_0 < 0$.

Cách 3. Rõ ràng $x_0 = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho, do đó $x_0 \neq 0$.

Từ $x_0^3 + x_0 - 1 = 0$ suy ra $x_0^4 + x_0^2 + x_0 = 0$, do đó $x_0^2 - x_0 = -x_0^4 < 0$.

Cách 4. Khảo sát hàm số $y = x^3 + x - 1 = 0$.

Ta có $y' = 3x^2 + 1 > 0 \forall x$, suy ra hàm số luôn đồng biến. Ta lại có $y(0) = -1 < 0$; $y(1) = 1$ nên phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $0 < x_0 < 1$, suy ra $x_0^2 - x_0 < 0$. (thông qua việc xét dấu tam thức $x_0^2 - x_0$).

Cách 5. Rõ ràng $x_0 \neq 0$. Chia 2 vế của $x_0^3 + x_0 - 1 = 0$ cho $x_0^3 \neq 0$ ta được:

$$1 + \frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0^3} = 0 \text{ suy ra}$$

$$0 < \frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{x_0^3} - 1 = \left(\frac{1}{x_0} - 1\right)\left(\frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{x_0} + 1\right).$$

Do tam thức $\left(\frac{1}{x_0}\right)^2 + \frac{1}{x_0} + 1 > 0 \forall x_0 \neq 0$ suy ra $\frac{1}{x_0} - 1 > 0$ hay

là $\frac{1-x}{x} > 0$, điều này tương đương với $x_0(1-x_0) > 0$ hay $x_0^2 - x_0 < 0$.

b) Bạn đọc tự làm.

c) *Cách 1.* Biến đổi phương trình

$$0 = x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1 = x^5 + x^3 - x^2 + x^3 + x - 1 = x^2(x^3 + x - 1) + (x^3 + x - 1) = (x^2 + 1)(x^3 + x - 1).$$

Vì $x^2 + 1 > 0 \forall x$ suy ra $x^3 + x - 1 = 0$. Theo câu a), phương trình này có duy nhất nghiệm thực thuộc $(0, 1)$ (xem cách 4).

Cách 2. Xét hàm số $f(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1$.

Ta có $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 - 2x + 1 = 5(x^4 + x^2) + (x-1)^2 > 0 \forall x$, do đó hàm số luôn đồng biến, nên phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm.

Ví dụ 5. Cho hai hàm số $f(x) = 4x^3 - dx$ và

$$g(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c.$$

a) Chứng minh rằng, nếu khi $|x| \leq 1$ mà $|f(x)| \leq 1$ và $|g(x)| \leq 1$ thì $f(x) \equiv g(x)$.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) - 1$ với d thỏa mãn a).

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1, 0)$ và cắt đồ thị y tại 3 điểm khác nhau. Giả sử hai giao điểm khác A là B và C . Tìm quỹ tích trung điểm M của BC khi đường thẳng quay quanh điểm A , nhưng vẫn cắt đồ thị tại 3 điểm khác nhau A, B, C .

Giải: a) Xét $f(x) = 4x^3 - dx$. Vì khi $|x| \leq 1$ thì $|f(x)| \leq 1$ nên nếu $x = 1$, ta có $4 - d \leq 1$ suy ra $3 \leq d$ và nếu $x = \frac{1}{2}$ ta có $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}d \geq -1$ suy ra $d \leq 3$. Vậy $d = 3$. Do đó $f(x) = 4x^3 - 3x$. Ta sẽ chứng minh $g(x) = 4x^3 - 3x$. Thật vậy, vì $g(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$,

$$g(-x) = -4x^3 + ax^2 - bx + c.$$

$$\text{nên } \frac{1}{2} [g(x) - g(-x)] = 4x^3 + bx$$

Vì khi $|x| \leq 1$ thì $|g(x)| \leq 1$ và $|g(-x)| \leq 1$ nên $|4x^3 + b| =$

$$= \frac{1}{2} |g(x) - g(-x)| \leq \frac{1}{2} (|g(x)| + |g(-x)|) \leq 1 \text{ nên suy ra } b = -3$$

(Chứng minh trên).

Vậy $g(x) = 4x^3 + ax^2 - 3x + c$.

Mặt khác vì $g(1) \leq 1$ nên $a + c \leq 0$ và $g(-1) \geq -1$.

Nên $a + c \geq 0$ suy ra $a + c = 0$ (*)

Ta lại có $g(\frac{1}{2}) \geq -1$ suy ra $\frac{a}{4} + c \geq 0$ và $g(-\frac{1}{2}) \leq 1$

Suy ra $\frac{a}{4} + c \leq 0$, nên $\frac{a}{4} + c = 0$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $a = c = 0$. Vậy $g(x) = 4x^3 - 3x$.

b) $y = f(x) - 1 = 4x^3 - 3x - 1$.

Bạn đọc tự khảo sát.

c) Đường thẳng đi qua điểm $(1,0)$ có dạng $y = k(x-1)$. Để nó cắt đồ thị $y = f(x) - 1$ tại 3 điểm khác nhau thì phương trình $4x^3 - 3x - 1 = k(x-1)$ phải có 3 nghiệm phân biệt hay phương trình $(x-1)(4x^2 + 4x + 1-k) = 0$ phải có 3 nghiệm phân biệt. Muốn vậy phương trình $4x^2 + 4x + 1-k = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1, tức là phải thỏa mãn các điều kiện

$$\Delta' = 4 - 4(1-k) = 4k > 0 \Rightarrow k > 0$$

và $9 - k \neq 0 \Rightarrow k \neq 9$.

Kết hợp ta được $k > 0$ và $k \neq 9$.

Vậy đường thẳng cần tìm có dạng $y = k(x-1)$, $k > 0$ và $k \neq 9$.

Để tìm quỹ tích, ta nhận xét rằng hoành độ của B và C là nghiệm của phương trình:

$$4x^2 + 4x + 1 - k = 0, \quad k > 0 \text{ và } k \neq 9.$$

Vì phương trình này có biệt số $\Delta' = 4k > 0$, nên có hai nghiệm x_1, x_2 .

Theo định lý Viét:

$$x_1 + x_2 = -1.$$

Do đó hoành độ trung điểm M của đoạn BC là

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ không phụ thuộc vào } k.$$

Do vậy quỹ tích trung điểm M thuộc đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$.

Vì $k > 0$, $k \neq 9$ nên quỹ tích là nửa đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ ($y < 0$) và bỏ điểm $(-\frac{1}{2}, -\frac{27}{2})$ (chú ý ở đây $y < 0$ vì $y = k(x - 1) = -\frac{27}{2}k < 0$ với $k > 0$).

Đảo lại, nếu lấy một điểm $(-\frac{1}{2}, y_0)$ bất kỳ thuộc nửa đường thẳng nói trên thì $y_0 < 0$ vì y_0 là giao điểm của $x = -\frac{1}{2}$ với $y = k(x - 1)$ nên $k = -\frac{2}{3}y_0 > 0$ và vì $y_0 \neq -\frac{27}{2}$ nên $k \neq 9$. Hoành độ của B và C là giao điểm của đồ thị và đường thẳng $y = -\frac{2}{3}y_0(x - 1)$ nên là nghiệm của phương trình $4x^2 + 4x + 1 + \frac{2}{3}y_0 = 0$, phương trình này có biệt số $\Delta' = -\frac{8}{3}y_0 > 0$. Theo định lý Viét: $x_1 + x_2 = -1$.

Do hoành độ trung điểm M là $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2}$.

Vậy quỹ tích cần tìm là nửa đường thẳng

$$x = -\frac{1}{2} \quad (y < 0) \text{ trừ điểm } (-\frac{1}{2}, -\frac{27}{2}).$$

Nhận xét: Ta có thể tìm hoành độ trung điểm M như sau:

Vì hoành độ của A, B, C là nghiệm của phương trình:

$$4x^3 - 3x - 1 = k(x - 1),$$

hay $4x^3 - (3 + k)x + k - 1 = 0$ nên tổng của chúng bằng 0 (theo công thức Viét). Từ đó $1 + x_1 + x_2 = 0$ suy ra $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{1}{2}$ hay $x_M = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số. Gọi đồ thị này là (C).

b) Gọi (D) là đường thẳng đi qua gốc tọa độ, có hệ số góc m.

Hãy khảo sát sự tương giao giữa (D) và (C) tùy theo các giá trị của m.

c) Giả sử, ngoài gốc tọa độ O , (D) và (C) còn cắt nhau tại M và N . Hãy xác định m để điểm cực tiểu của (C) nhìn đoạn MN dưới một góc vuông.

Giải: a) Bạn đọc tự giải.

b) Đường thẳng (D) có dạng $y = mx$. Hoành độ giao điểm của (D) và (C) là nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2x^2 + x = mx \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1 - m) = 0$$

Phương trình này có nghiệm $x = 0$ (hoành độ điểm O); các nghiệm còn lại là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 2x + 1 - m = 0 \quad (*)$$

Tính $\Delta' = m$.

*) Nếu $m = 0 \Rightarrow$ (D) và (C) có một giao điểm nữa là $x = 1$, $y = 0$ (ngoài giao điểm là $O(0,0)$).

*) Nếu $m > 0$, (D) và (C) có hai giao điểm nữa là $M(1 + \sqrt{m}, m + m\sqrt{m})$ và $N(1 - \sqrt{m}, m - m\sqrt{m})$.

*) Nếu $m < 0$, (D) và (C) chỉ có duy nhất một giao điểm là $O(0,0)$.

c) Cách 1. Tính $y' = 3x^2 - 4x + 1$. Cho $y' = 0$ ta được $x_1 = 1$, $x_2 = 1/3$.

$y'' = 6x - 4$, $y''(1) = 2 > 0$ nên $A(1,0)$ là điểm cực tiểu.

Chú ý rằng, nếu $m = 0$ thì (D) là đường $y = 0$, tiếp xúc với (C) tại điểm A nên điểm A không nhìn đoạn MN (trong trường hợp này $MN \equiv OA$) dưới một góc vuông được. Vì vậy chỉ xét $m > 0$. Xét đường AM , hệ số góc

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{m + m\sqrt{m} - 0}{1 + \sqrt{m} - 1} = \sqrt{m} + m.$$

Xét đường AN , hệ số góc

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{y_N - y_A}{x_N - x_A} = \frac{m - m\sqrt{m} - 0}{1 - \sqrt{m} - 1} = m - \sqrt{m}.$$

Để AM vuông góc với AN phải có $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1$ hay là $(\sqrt{m} + m)(m - \sqrt{m}) = -1$ suy ra phương trình $m^2 - m + 1 = 0$. Phương trình này vô nghiệm. Vậy không có giá trị m nào để điểm cực tiểu A của (C) nhìn MN dưới một góc vuông.

Cách 2. Gọi I là trung điểm đoạn MN. Nếu $\widehat{MAN} = 1v$ thì trong tam giác vuông AMN có $AI = (1/2) MN$, mà $x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = 1$.

$$y_I = \frac{y_M + y_N}{2} = m \Rightarrow I(1, m).$$

Do đó độ dài $AI = \sqrt{(1-1)^2 + (m-0)^2} = m$ (nhớ rằng $A(1,0)$) còn độ dài $MN = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2} = \sqrt{4m + 4m^3}$ suy ra phương trình: $m = \frac{1}{2} \sqrt{4m + 4m^3}$ hay $m^2 = m + m^3$ hay $m(m^2 - m + 1) = 0$,

phương trình này có nghiệm duy nhất $m = 0$. Nhưng như trên đã nói, $m = 0$ không thích hợp. Vậy không có giá trị m nào thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = 2x^3 + 3mx^2 - 2m + 1$.

a) Với những giá trị nào của m , thì trên đồ thị của hàm số có một cặp điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$. Hãy chỉ rõ các giao điểm của đồ thị với trục hoành.

2. Cho hàm số $y = mx^3 - 3x$. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 4$. b) Xác định m sao cho $|y| \leq 1$, khi $|x| \leq 1$.

3. Cho hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (3m + 1)x - (m + 1)$.

a) Với những giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

b) Với những giá trị nào của m thì phương trình $y=0$ có 3 nghiệm (có thể trùng nhau). Gọi các nghiệm đó là x_1, x_2, x_3 . Xác định m sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ là nhỏ nhất.

4. (A - 1977) Cho hàm số

$$y = (a^2 - 1) \frac{x^3}{3} + (a + 1)x^2 + 3x + 5.$$

a) Với những giá trị nào của a thì hàm số luôn đồng biến.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $a = 2$.

5. Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 - m$.

a) Với những giá trị nào của m thì hàm số có cực đại, cực tiểu?

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 3$.

6. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 - 1$.

a) Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$ hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu.

b) Chứng minh rằng với mọi m phương trình $x^3 + mx^2 - 1 = 0$ luôn có một nghiệm dương. Xác định m để nghiệm dương đó là nghiệm duy nhất của phương trình.

7. Giả sử $a^2 + b^2 > 0$. Chứng minh rằng phương trình

$$x^3 - 3(a^2 + b^2)x + 2(a^3 + b^3) = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt.

8. Các số p và q phải thỏa mãn điều kiện gì để đồ thị hàm số $y = x^3 + px + q$:

a) Cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

b) Cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt với hoành độ dương.

9. (A. B. D-1984) Với những giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(m+1)x - 3m + 6$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

10. a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = 3x - 4x^3$.

b) Chứng minh rằng $\frac{20}{60} < \sin 20^\circ < \frac{21}{60}$.

11. Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + (2m^2 - 1)x - m(m^2 - 1)$. Xác định m sao cho đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt với hoành độ dương.

12. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

a) Xác định a, b, c, d để đồ thị qua gốc tọa độ và tại đó tiếp tuyến lập với trục hoành góc 45° . Hàm số đạt cực đại tại $x_1 = m$,

cực tiểu tại $x_2 = n$ sao cho $m + n = \frac{6}{5}$ và $m^3 + n^3 = \frac{126}{125}$.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị vừa tìm được.

c) Chứng minh rằng, nếu $b^2 - 3ac < 0$ thì $\forall d$, đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

d) Giả sử $a, b, c > 0$ và $d < 0$. Chứng minh rằng trong các giao điểm của đồ thị với trục hoành luôn luôn chỉ có một giao điểm có hoành độ dương.

13. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Viết phương trình tiếp tuyến qua điểm $A(1,0)$. Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào khác song song với nó.

c) Với k bằng bao nhiêu để tồn tại ít nhất một số b sao cho đường thẳng $y = kx + b$ là tiếp tuyến của đồ thị?

d) Một đường thẳng quay quanh $B(0,2)$ cắt đồ thị tại A, C . Tìm quỹ tích điểm giữa đoạn AC .

2. Khảo sát hàm bậc bốn

* *Dạng trùng phương:* $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$).

1) *Khoảng xác định:* Hàm số xác định với mọi x .

2) *Chiều biến thiên:* Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$. Có ba khả năng có thể xảy ra:

α) Phương trình $2ax^2 + b = 0$ vô nghiệm (khi $ab > 0$). Lúc đó $y' = 0$ chỉ khi $x = 0$ và tại đó đạo hàm đổi dấu. Vậy tại $x = 0$ hàm số đạt cực trị.

β) Phương trình $2ax^2 + b = 0$ có nghiệm kép (khi $b = 0$). Lúc đó $y' = 4a^3$ nên tại $x = 0$ đạo hàm bằng không và đổi dấu. Vậy tại $x = 0$ hàm số đạt cực trị.

γ) Phương trình $2ax^2 + b = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 (khi $ab < 0$). Hiển nhiên x_1, x_2 đối xứng với nhau qua điểm $O(x_1 < x_2)$. Lúc đó y' có dấu như sau:

x	$-x$	x_1		0	x_2		$+x$	
y'	$a > 0$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
	$a < 0$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Bảng 21

Như vậy, trong trường hợp này hàm số có ba điểm cực trị với hành độ là $x_1, 0, x_2$.

Tóm lại: Hàm số luôn luôn có cực trị:

Hoặc có một cực trị tại $x = 0$.

Hoặc có 3 cực trị tại $x_1, 0, x_2$.

3) *Điểm uốn*: Ta có $y'' = 12ax^2 + 2b$:

$$y'' = 0 \text{ khi } x^2 = -\frac{b}{6a}.$$

Như vậy, hàm số hoặc không có điểm uốn, hoặc có hai điểm uốn (đối xứng nhau qua điểm O).

4) *Bảng biến thiên*: Chú ý rằng có thể xảy ra sáu khả năng:

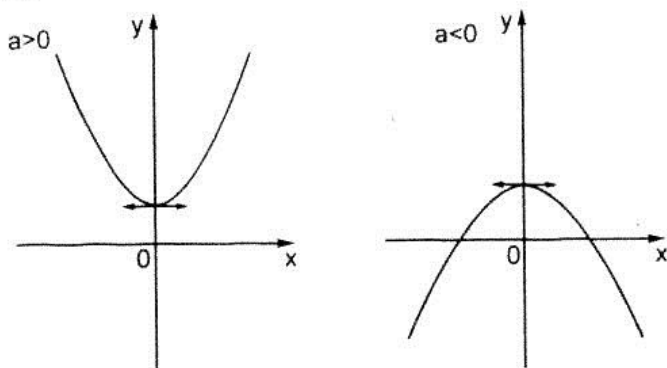
$$a > 0 \begin{cases} \alpha) \\ \beta) \\ \gamma) \end{cases} \quad a < 0 \begin{cases} \alpha) \\ \beta) \\ \gamma) \end{cases}$$

nên có thể xảy ra sáu khả năng về bảng biến thiên. Ở đây, ta lập một bảng biến thiên ứng với $a > 0$ và khả năng γ).

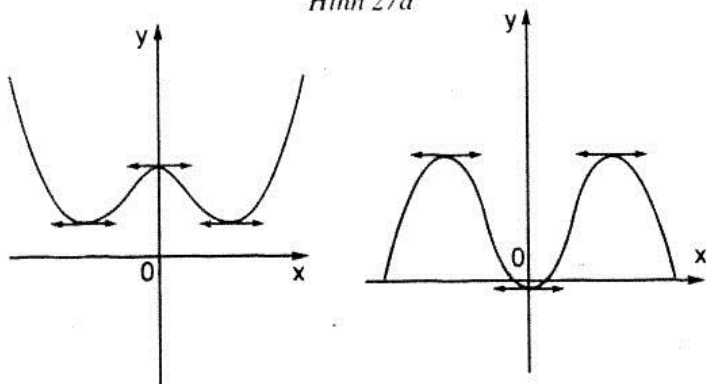
x	-x	x ₁		0	x ₂		+x
y'		-	0	+	0	-	0
y	+x	m		M	m		+x

Bảng 22

5) *Vẽ đồ thị:* Đồ thị của hàm số có và chỉ có một trong bốn dạng cơ bản sau (khả năng α) và β) tương tự như nhau). Chú ý rằng hàm số là hàm chẵn nên đồ thị đối xứng với nhau qua trục tung.



Hình 27a



Hình 27b

Nhận xét. Đồ thị của hàm số có trục đối xứng là trục tung và không có tâm đối xứng.

Ví dụ 1. Cho hàm số

$$y = x^4 + 2(m - 2)x^2 + m^2 - 5m + 5.$$

a) Với những giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

Giải: a) Để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì phương trình:

$$x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5 = 0$$

phải có bốn nghiệm phân biệt. Đặt $t = x^2$, khi đó phương trình:

$$t^2 + 2(m-2)t + m^2 - 5m + 5 = 0$$

phải có hai nghiệm dương phân biệt. Muốn vậy ta phải có:

$$\text{hay là : } \begin{cases} \Delta' = m - 1 > 0, \\ P = \frac{c}{a} = m^2 - 5m + 5 > 0, \\ S = -\frac{b}{a} = -2(m-1) > 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} m > 1 \\ m < \frac{5-\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } m > \frac{5+\sqrt{5}}{2} \\ m < 2 \end{cases}$$

$$\text{Hay là : } 1 < m < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

Vậy, với $1 < m < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ thì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

b) Khi $m = 1$, hàm số đã cho có dạng:

$$y = x^4 - 2x^2 + 1.$$

* *Khoảng xác định:* Hàm số xác định với mọi x .

* *Chiều biến thiên:* Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$.

$y' = 0$ khi $x = -1$, $x = 0$ và $x = 1$;

$y' < 0$ khi $x < -1$ hoặc $0 < x < 1$.

$y' > 0$ khi $-1 < x < 0$ hoặc $x > 1$.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại các điểm

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

và đạt cực đại tại điểm $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$

* *Điểm uốn*: Ta có $y'' = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$

$y'' = 0$ và đổi dấu tại các điểm $x = -1/\sqrt{3}$ và $x = 1/\sqrt{3}$.

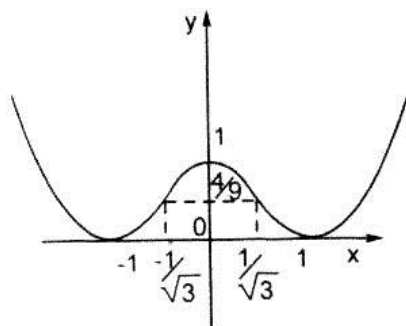
Vậy đó chính là hoành độ của các điểm uốn.

* *Bảng biến thiên*: Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$-1/\sqrt{3}$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$+\infty$
y'		0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$
		0	$4/9$		$4/9$	0	

Bảng 23

* *Đồ thị*:



Hình 28

Nhận xét. Trục tung là trục đối xứng của đồ thị.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$.

a) Xác định các giá trị của m sao cho đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm có các hoành độ tương ứng lập thành một cấp số cộng.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -2$.

Giải: a) Để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt thì phương trình $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0$ phải có bốn nghiệm phân biệt. Hay là phương trình $t^2 - 2(m+1)t + 2m+1 = 0$ phải có hai nghiệm dương phân biệt ($t = x^2$).

Phương trình trên có hai nghiệm : $t_1 = 1, t_2 = 2m+1$.

Vậy ta phải có:
$$\begin{cases} 2m+1 > 0 \\ 2m+1 \neq 1 \end{cases}$$

hay là
$$\begin{cases} m > -1/2 \\ m \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Giả sử điều kiện (*) được thỏa mãn, khi đó phương trình (1) sẽ có bốn nghiệm:

$$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -\sqrt{2m+1}, x_4 = \sqrt{2m+1}$$

Ta xét hai trường hợp sau:

1) Nếu $2m+1 > 1$: tức là $m > 0$. Khi đó ta sẽ có

$$-\sqrt{2m+1} < -1 < 1 < \sqrt{2m+1},$$

$-\sqrt{2m+1}$	-1	0	1	$\sqrt{2m+1}$
x_3	x_1		x_2	x_4

Vậy để bốn số x_3, x_1, x_2, x_4 lập thành một cấp số cộng ta phải có: $x_1 - x_3 = 2 = x_4 - x_2$.

hay là: $-1 + \sqrt{2m+1} = 2 = \sqrt{2m+1} - 1$.

Từ đó suy ra: $m = 4$.

2) Nếu $0 < 2m+1 < 1$: tức là $-\frac{1}{2} < m < 0$.

Khi đó ta sẽ có:

$$-1 < -\sqrt{2m+1} < \sqrt{2m+1} < 1$$

-1	$-\sqrt{2m+1}$	0	$\sqrt{2m+1}$	1
x_1	x_3		x_4	x_2

Vậy để bốn số x_1, x_3, x_4, x_2 lập thành một cấp số cộng ta phải có:

$$x_3 - x_1 = x_4 - x_3 = x_2 - x_4,$$

hay là: $- \sqrt{2m+1} + 1 = 2\sqrt{2m+1} = 1 - \sqrt{2m+1}.$

Từ đó suy ra: $m = -\frac{4}{9}$ (giá trị này chấp nhận được vì $-\frac{1}{2} < -\frac{4}{9} < 0$).

Vậy với $m = 4$ hoặc $m = -\frac{4}{9}$ thì đồ thị của hàm số sẽ cắt trục hoành tại bốn điểm có các hoành độ tương ứng lập thành một cấp số cộng.

b) Khi $m = -2$, hàm số đã cho có dạng:

$$y = x^4 + 2x^3 - 3.$$

* **Khoảng xác định:** Hàm số xác định với mọi x .

* **Chiều biến thiên:** Ta có $y' = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1)$; $y' = 0$ khi $x = 0$.

$y' < 0$ khi $x < 0$, trong khoảng này hàm số nghịch biến.

$y' > 0$ khi $x > 0$, trong khoảng này hàm số đồng biến.

Hàm số đạt cực tiểu bằng -3 khi $x = 0$.

* **Điểm uốn:** Ta có $y'' = 12x^2 + 4 > 0$ với mọi x .

Vậy đồ thị của hàm số không có điểm uốn.

* **Bảng biến thiên:** Ta có bảng biến thiên:

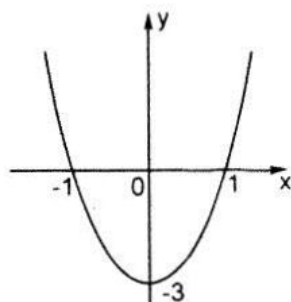
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	m -3	$+\infty$

Bảng 24

* **Đồ thị** : Điểm đặc biệt :
 $(-1, 0), (1, 0)$

Nhận xét : Trục tung là trục đối xứng của đồ thị.

* **Hàm bậc bốn đầy đủ**:
 $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
 $(a \neq 0)$



Hình 29

Việc khảo sát hàm số bậc bốn đầy đủ có nhiều khó khăn. Vì vậy trong chương trình phổ thông, ta chỉ gặp hàm số đơn giản “dễ khảo sát”. Ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 3. a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1.$$

b) Chứng tỏ rằng đồ thị của hàm số có trục đối xứng. Từ đó hãy xác định các giao điểm của đồ thị với trục hoành.

Giải: * **Khoảng xác định**: Hàm số xác định với mọi x .

* **Chiều biến thiên** : Ta có $y' = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 =$
 $= 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 4(x - 1)(x + 1)(x - 3).$

$y' = 0$, khi $x = -1, x = 1, x = 3$,

$y' < 0$, khi $x < -1$ hoặc $1 < x < 3$,

$y' > 0$, khi $-1 < x < 1$ hoặc $x > 3$.

Vậy hàm số có: cực tiểu bằng -10 khi $x = -1$,

cực tiểu bằng -10 khi $x = 3$,

cực đại bằng 6 khi $x = 1$.

* **Điểm uốn** : Ta có $y'' = 12x^2 - 24x - 4 = 4(3x^2 - 6x - 1);$

$y'' = 0$ và đổi dấu tại hai điểm $x = 1 \pm 2\sqrt{3}/3$.

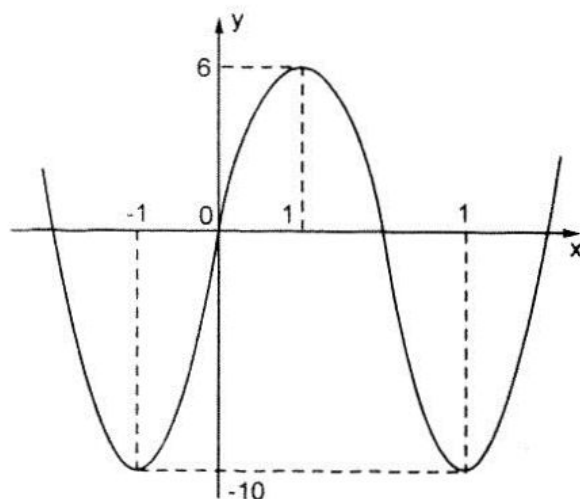
Vậy $x = 1 - 2\sqrt{3}/3$ và $x = 1 + 2\sqrt{3}/3$ là hoành độ điểm uốn của đồ thị và tung độ bằng nhau và bằng $-26/9$ (đã tính ở trên).

* *Bảng biến thiên*: Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$1 - 2\sqrt{3}/3$	1	$1 + 2\sqrt{3}/3$	3	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$			6			$+\infty$

$\swarrow$ m $\nearrow$ 0 $\searrow$ m $\nearrow$
 -10 M -10

Bảng 25



Hình 30

b) Nhìn vào đồ thị ta đoán nhận rằng đường thẳng $x = 1$ là trục đối xứng của đồ thị. Ta sẽ chứng minh điều này một cách chặt chẽ bằng cách chuyển trục tọa độ.

Ta thực hiện phép đổi trục tọa độ.

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases} \quad \text{hay là} \quad \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y. \end{cases}$$

Khi đó trong hệ tọa độ mới, hàm số đã cho có dạng:

$$\begin{aligned} Y &= (X+1)^4 - 4(X+1)^3 - 2(X+1)^2 + 12(X+1) - 1 \\ &= X^4 - 8X^2 + 6. \end{aligned}$$

Đây là hàm chẵn. Vậy suy ra đường thẳng $x = 1$ là trục đối xứng của đồ thị.

Trong hệ trục tọa độ mới cho $Y = 0$ ta có:

$$X^4 - 8X^2 + 6 = 0, \text{ từ đó } X = \pm \sqrt{4 \pm \sqrt{10}}.$$

Như vậy trong hệ trục tọa độ cũ:

$$x = 1 \pm \sqrt{4 \pm \sqrt{10}}$$

Vậy đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \sqrt{4 - \sqrt{10}} & x_2 &= 1 + \sqrt{4 - \sqrt{10}} \\ x_3 &= 1 - \sqrt{4 + \sqrt{10}} & x_4 &= 1 + \sqrt{4 + \sqrt{10}}. \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^4 + mx^3 + mx^2 + mx + 1$.

- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$.
- Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn luôn đi qua một điểm cố định duy nhất.
- Với m nào thì đồ thị không cắt trục hoành?

Giải: a) Bạn đọc tự giải.

b) **Cách 1.** Gọi (x_0, y_0) là điểm cố định của họ đường cong.

Khi đó

$$y_0 = x_0^4 + 1 + m(x_0^3 + x_0^2 + x_0). \quad (\forall m)$$

Hay $m(x_0^3 + x_0^2 + x_0) + (x_0^4 + 1 - y_0) = 0 \quad (\forall m)$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} x_0(x_0^2 + x_0 + 1) = 0 & (i) \\ x_0^4 + 1 - y_0 = 0 & (ii) \end{cases}$$

Vì $x_0^2 + x_0 + 1 > 0 \quad \forall x_0$ nên phương trình (i) cho một nghiệm duy nhất $x_0 = 0$, thay vào (ii) được $y_0 = 1$. Vậy họ đường cong có một điểm duy nhất là $(0, 1)$.

Cách 2. Rõ ràng điểm $(0,1)$ nằm trên đồ thị với mọi m , do đó nó là điểm cố định. Cần chứng minh rằng đó là điểm cố định duy nhất. Thấy vậy, giả sử có điểm cố định khác (x_0, y_0) với $x_0 \neq 0$. Khi đó

$$y_0 = x_0^4 + mx_0^3 + mx_0^2 + mx_0 + 1. \quad (\forall m)$$

$$\text{Hay } m(x_0^3 + x_0^2 + x_0) + (x_0^4 + 1 - y_0) = 0, \quad (\forall m)$$

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} x_0(x_0^2 + x_0 + 1) = 0 & (i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^4 + 1 - y_0 = 0 & (ii) \end{cases}$$

Từ (i) vì $x_0 \neq 0$ suy ra $x_0^2 + x_0 + 1 = 0$, điều này không xảy ra vì phương trình đó vô nghiệm. Vậy $(0,1)$ là điểm cố định duy nhất.

c) Vì $y(0) = 1 > 0$ với mọi m nên để đồ thị không cắt trục hoành thì $y(x) > 0$ với $x \neq 0$, hay là

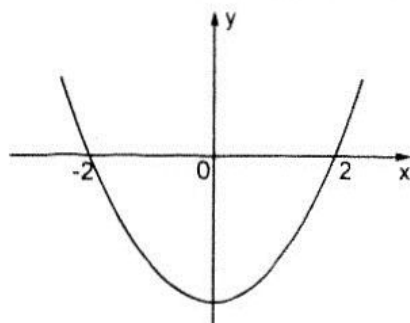
$$\begin{aligned} x^4 + mx^3 + mx^2 + mx + 1 &= \\ &= x^2(x^2 + 1/x^2 + m(x + 1/x) + m) > 0, \quad \forall m \end{aligned}$$

$$\text{Do } x^2 > 0 \text{ suy ra } x^2 + \frac{1}{x^2} + m(x + \frac{1}{x}) + m > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Gọi vế trái là g , đặt

$$t = x + \frac{1}{x}, \quad |t| = \left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2$$

dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \pm 1$. Thay vào biểu thức g ta được



Hình 31

$$g(t) = t^2 + mt + m - 2 > 0 \text{ khi } |t| \geq 2.$$

Xét $\Delta = m^2 - 4m + 8 > 0 \quad \forall m$, do đó đồ thị g luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt, $g(t)$ là parabol quay bề lõm lên trên. Muốn $g(t) > 0$ với mọi $t \leq -2, t \geq 2$ thì cả hai nghiệm của $g(t)$ phải thuộc khoảng $(-2, 2)$ hay

phải có:

$x_2 > x_1 - 2$ và $x_1 < x_2 < 2$, tức là:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta = m^2 - 4m + 8 > 0 \quad (\forall m) \\ 1. \quad g(-2) > 0 \Rightarrow -m + 2 > 0 \Rightarrow m < 2 \\ 1. \quad g(2) > 0 \Rightarrow 3m + 2 > 0 \Rightarrow m > -\frac{2}{3} \\ -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2} > -2 \Rightarrow m < 4 \\ -\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2} < -2 \Rightarrow m > -4 \end{array} \right.$$

Kết hợp lại ta được $-\frac{2}{3} < m < 2$

Cách khác. Ta cũng có thể xác định m sao cho:

$g(t) = t^2 + mt + m - 2 > 0$ khi $|t| \geq 2$ bằng cách sau đây.

Xét hoành độ đỉnh của parabol $g(t)$: $t = -m/2$. Có thể xảy ra các trường hợp sau đây:

i) $|\frac{-m}{2}| \geq 2 \Rightarrow |m| \geq 4$, khi đó giá trị nhỏ nhất của g trên

đoạn $|t| \geq 2$ là: $g_{\min} = g(\frac{-m}{2}) > 0$ hay $-\frac{m}{2} + m - 2 > 0$.

Điều này không xảy ra vì $\Delta = 1 - 2 < 0$

ii) $|\frac{-m}{2}| < 2 \Rightarrow |m| < 4$, khi đó $g_{\min} = \min(g(2), g(-2))$

$= \min(3m + 2, 2 - m)$.

* Nếu $3m + 2 < 2 - m \Rightarrow -4 < m < 0$ thì $g_{\min} = 3m + 2 > 0$

$\Rightarrow m > -\frac{2}{3}$, kết hợp với $-4 < m < 0$ ta được $-\frac{2}{3} < m < 0$. (*)

* Nếu $3m + 2 \geq 2 - m \Rightarrow 0 \leq m < 4$ thì $g_{\min} = 2 - m > 0 \Rightarrow$

$m < 2$. Kết hợp với $0 \leq m < 4$ ta được $0 \leq m < 2$ (**).

Kết hợp (*) với (**) ta được $-\frac{2}{3} < m < 2$.

Vậy với $-\frac{2}{3} < m < 2$ đồ thị không cắt trục hoành.

BÀI TẬP

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = x^4 - 10x^2 + 9$; b) $y = -\frac{x^4}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2$.

2. Với những giá trị nào của m , thì phương trình $mx^4 - (m-3)x^2 + 3m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt, đồng thời một nghiệm nhỏ hơn -2 , còn ba nghiệm kia lớn hơn -1 ?

3. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = 3x^4 - 10x^3 + 9x^2 - 1$; b) $y = x^4 + x^3 - 10$.

4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số:

$$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2.$$

Chứng minh rằng đồ thị của hàm số có trục đối xứng.

5. Xác định a và b biết rằng đồ thị của hàm số

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + 2x$$

nhận đường thẳng $x = -1$ làm trục đối xứng.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số đã tìm được.

6*. Chứng minh rằng nếu $156q \geq 27p^4$, thì

$$x^4 + px^3 + q \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

7*. Tìm liên hệ giữa p và q sao cho:

$$x^4 + px + q \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

Chứng tỏ rằng với mỗi liên hệ đó ta cũng có:

$$qx^4 + px^3 + 1 \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

8*. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = (x+a)^4 + (x+b)^4.$$

9*. Với những giá trị nào của m , thì hàm số:

$$y = x^4 + mx^3 + mx^2 + mx + 1$$

có cực đại và cực tiểu.

10. Cho hàm số $y = 3x^4 + 4x^3(\cos\alpha - \sin\alpha) - 3x^2\sin 2\alpha$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

a) Với α nào thì hàm số có cực tiểu trong đoạn $-\sin\alpha \leq x \leq \cos\alpha$?

b) Với α nào thì cực đại của hàm số cũng là giá trị nhỏ nhất của nó trong đoạn trên?

3. Khảo sát hàm phân thức: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$).

1) *Khoảng xác định.* Hàm số xác định với mọi $x \neq -\frac{d}{c}$.

2) *Chiều biến thiên.* Ta có $y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} = \frac{D}{(cx+d)^2}$.

$$D = ad - bc$$

Đạo hàm luôn luôn giữ dấu và có 3 khả năng sau đây có thể xảy ra:

$\alpha)$ $D > 0$: suy ra $y' > 0$, do đó hàm số luôn luôn đồng biến trong từng khoảng xác định của nó.

$\beta)$ $D < 0$: suy ra $y' < 0$, do đó hàm số luôn luôn nghịch biến trong từng khoảng xác định.

$\gamma)$ $D = 0$: suy ra $y' = 0$, do đó hàm số là hằng số trong toàn khoảng xác định.

Chú ý rằng hàm số không bao giờ có cực trị.

3) *Tiệm cận.* Đồ thị của hàm số có:

* Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$;

* Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$.

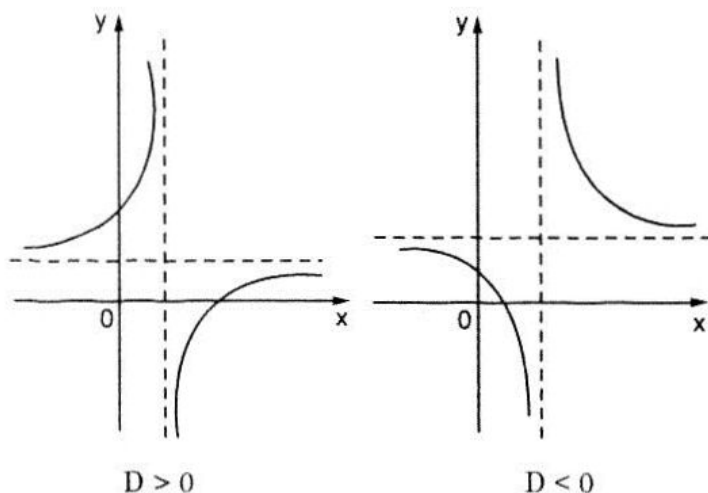
4) *Bảng biến thiên.* Tương ứng với các trường hợp $D > 0$ và $D < 0$ ta có các bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$-d/c$	$+\infty$
y'	+		+
y	a/c	$+\infty$	$-\infty$

x	$-\infty$	$-d/c$	$+\infty$
y'	-		-
y	$+\infty$	a/c	$-\infty$

Bảng 26

5) **Đồ thị.** Đồ thị của hàm số có và chỉ có một trong hai dạng cơ bản sau đây (trừ một trường hợp suy biến thành đường thẳng).



Hình 32

Nhận xét. Đồ thị của hàm số nhận giao điểm của hai tiệm cận $I(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c})$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{mx - 2}{x + 1}$. (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị ứng với $m = \frac{1}{2}$. Tìm trên đồ thị những điểm có tọa độ là những số nguyên và những điểm có tọa độ là những số nguyên không âm.

b) Chứng minh rằng tồn tại một giá trị m làm cho đồ thị có dạng không bình thường (suy biến). Dạng không bình thường này như thế nào?

c) Xét thêm hàm số $y = x^2 - mx - 2$ (2). Chứng minh rằng khi m thay đổi đồ thị của hai hàm số (1) và (2) luôn đi qua một điểm cố định.

d) Xác định m để điểm cố định đó trở thành điểm tiếp xúc của hai đồ thị.

Giải: a) Với $m = \frac{1}{2}$ hàm số có dạng $y = \frac{x-4}{2(x+1)}$.

* *Khoảng xác định:* $\forall x \neq -1$.

* *Chiều biến thiên:* $y' = \frac{5}{2(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$.

Vậy hàm số luôn đồng biến trong khoảng xác định của nó.

* *Tiệm cận:*

Đồ thị có tiệm cận đứng $x = -1$, vì $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-4}{2(x+1)} = \infty$.

Đồ thị có một tiệm cận ngang $y = \frac{1}{2}$, vì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-4}{2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

* Bảng biến thiên:

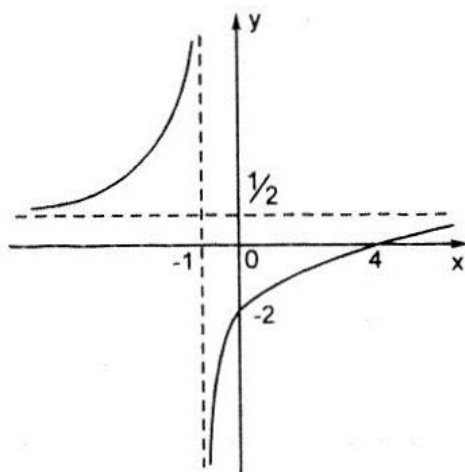
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	+
		$\swarrow +\infty$	$\swarrow 1/2$
y	$1/2$	$-\infty$	

Bảng 27

* Vẽ đồ thị: Cho $x=0, y=-2$;

$y=0, x=4$.

Bây giờ ta tìm trên đồ thị những điểm có tọa độ là những số nguyên.



Hình 33

Cách 1. Có thể viết $2y = \frac{x-4}{x+1} = 1 - \frac{5}{x+1}$

Muốn y là số nguyên thì $2y$ phải là số chẵn, muốn vậy $x+1$ phải là ước số của 5 tức là:

$$x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0, y = -2;$$

$$x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2, y = 3;$$

$$x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4, y = 0;$$

$$x + 1 = -5 \Rightarrow x = -6, y = 1.$$

Vậy có 4 điểm cần tìm $(0, -2)$, $(-2, 3)$, $(4, 0)$, $(-6, 1)$.

Trong những điểm có tọa độ là những số nguyên này chỉ có một điểm $(4, 0)$ là có tọa độ nguyên, không âm.

Cách 2. Từ $y = \frac{x-4}{2x+2}$ có thể viết

$$(2y - 1)x = -2y - 4 \Rightarrow x = -\frac{2y + 4}{2y - 1}.$$

Vì x nguyên nên $2y + 4$ chia hết cho $2y - 1$ hay là

$$2y + 4 = k(2y - 1), k \text{ là số nguyên} \Rightarrow$$

$(2y - 1) + 5 = k(2y - 1) \Rightarrow (k - 1)(2y - 1) = 5$. Điều này chứng tỏ $2y - 1$ phải là ước số của 5, do đó

$$2y - 1 = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = -6;$$

$$2y - 1 = -1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 4;$$

$$2y - 1 = 5 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = -2;$$

$$2y - 1 = -5 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = 0.$$

b) Cách 1. $y = m - \frac{2+m}{x+1}$

Hàm số này có dạng không bình thường khi nó là hằng số, tức là khi $2 + m = 0$, $x \neq -1 \Rightarrow m = -2$.

Khi đó đồ thị suy biến thành đường thẳng $y = -2$ trừ điểm $(-1, -2)$.

Cách 2. Hàm số này có dạng không bình thường khi nó là hằng số, do đó $y' = 0 \forall x \neq -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = \frac{m+2}{(x+1)^2} = 0 \quad (\forall x \neq -1) \Rightarrow m = -2.$$

Cách 3. Hàm số dạng phân thức có dạng không bình thường khi tử số và mẫu số có nghiệm chung.

Mẫu số có nghiệm $x = -1$. Giá trị này phải là nghiệm của tử số, do đó $-m - 2 = 0 \Rightarrow m = -2$.

c) *Cách 1.* Gọi (x_0, y_0) là điểm cố định của hàm số (1), khi đó

$$y_0 = \frac{mx_0 - 2}{x_0 + 1}. (\forall m) \text{ hay } mx_0 - y_0 - x_0 y_0 - 2 = (\forall m).$$

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ -y_0 - x_0 y_0 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 0, y_0 = -2.$$

Điểm cố định của hàm số (1) là $(0, -2)$.

Gọi (x_1, y_1) là điểm cố định của hàm số (2), khi đó $y_1 = x_1^2 - mx_1 - 2 (\forall m)$ hay $mx_1 + y_1 - x_1^2 + 2 = 0 (\forall m)$.

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 - x_1^2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0, y_1 = -2.$$

Điểm cố định của hàm số (2) là $(0, -2)$.

Vậy hai hàm số đã cho cùng đi qua một điểm cố định.

Cách 2. Rõ ràng $(0, -2)$ là điểm cố định của (1). Thay vào hàm số (2) thấy điểm đó thỏa mãn với mọi $m \Rightarrow (0, -2)$ cũng là điểm cố định của (2).

Cách 3. Khi hai đồ thị cùng đi qua một điểm cố định thì

$$x^2 - mx - 2 = \frac{mx - 2}{x + 1}, \quad x \neq -1, \forall m.$$

hay $-(x^2 + x)m + x^3 + x^2 - 2x = 0, \forall m$, suy ra

$$\begin{cases} x(x + 1) = 0 \\ x^3 + x^2 - 2x = 0. \end{cases}$$

Vì $x \neq -1$ nên có duy nhất nghiệm $x = 0$. Thay vào một trong 2 hàm số ta được $y = -2$. Vậy $(0, -2)$ là điểm cố định chung của (1) và (2).

d) *Cách 1.* Muốn $(0, -2)$ là điểm tiếp xúc, thì $x = 0$ phải là nghiệm kép của phương trình:

$$x^2 - mx - 2 = \frac{mx - 2}{x + 1}, \quad x \neq -1$$

hay là: $x[x^2 - (m - 1)x - 2(m + 1)] = 0$.

Đã có một nghiệm $x = 0$. Đòi hỏi $x = 0$ cũng là nghiệm của phương trình $x^2 - (m - 1)x - 2(m + 1) = 0$, tức là

$$2(m + 1) = 0 \Rightarrow m = -1$$

Cách 2. Ta giải trực tiếp tập hợp

$$x^2 - (m - 1)x - 2(m + 1) = 0$$

được nghiệm là $x = -2$ và $x = m + 1$.

Vậy $m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$

Cách 3. Để (1) và (2) tiếp xúc phải có

$$\begin{cases} x^2 - mx - 2 = \frac{mx - 2}{x + 1} \\ 2x - m = \frac{2 + m}{(x + 1)^2} \end{cases} \quad (*)$$

và để $(0, -2)$ là điểm tiếp xúc, thì $x = 0$ phải thỏa mãn (*),

$$\text{hay} \quad \begin{cases} -2 = -2 \\ -m = 2 + m \Rightarrow m = -1 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{x + 2}$.

a) Xác định các số nguyên dương a và b biết rằng hàm số đã cho luôn luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó và có giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng $y = 1$.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $a = 1$, $b = 1$. Tìm trên đồ thị đó các cặp điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

Giải: a) Do hàm số luôn luôn đồng biến nên:

$$y' = \frac{2a - b}{(x + 2)^2} > 0 \text{ với mọi } x \neq -2.$$

Tức là ta luôn luôn có $2a - b > 0$. (*)

Theo giả thiết, ta suy ra tiệm cận ngang của đồ thị phải là đường thẳng $y = 1$. Song, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = a$. Vậy $a = 1$, thay giá trị a vào bất đẳng thức (*) ta được $b < 2$. Vậy chỉ có duy nhất một giá trị nguyên dương $b = 1$ thỏa mãn. Tóm lại, các giá trị cần tìm là $a = 1$; $b = 1$.

b) Học sinh hãy tự khảo sát và vẽ đồ thị.

Bây giờ ta tìm trên đồ thị các cặp điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ. Giả sử rằng trên đồ thị có hai điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ. Hai điểm đó là:

$$(x_0, y_0); (-x_0, -y_0) \text{ với } x_0 \neq 0.$$

$$\text{Ta có: } y_0 = \frac{x_0 + 1}{x_0 + 2}, -y_0 = \frac{-x_0 + 1}{-x_0 + 2}.$$

Ta có $-(-y_0) = y_0$. Vậy ta có:

$$\frac{x_0 + 1}{x_0 + 2} = \frac{-x_0 + 1}{x_0 - 2},$$

từ đó suy ra: $x_0^2 = 2$, hay là $x_0 = \pm\sqrt{2}$.

Vậy trên đồ thị có hai điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ, đó là:

$$(-\sqrt{2}; \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}) \text{ và } (\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}).$$

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = \frac{(m-1)x+m}{x-m}$.

a) Chứng minh rằng với mọi $m \neq 0$ hàm số luôn luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 2$. Chứng minh rằng giao điểm hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

2. Cho hàm số $y = \frac{(2m-1)x+m}{x-m}$.

a) Xác định m để đồ thị hàm số đi qua điểm $(2, 3)$. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số ứng với m tìm được.

b) Chứng minh rằng có một giá trị m để cho đồ thị của hàm số có dạng không bình thường. Xác định m đó.

3. a) Tìm hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, biết rằng:

– đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = \frac{1}{2}$;

– đồ thị hàm số đi qua điểm $(0, -\frac{1}{2})$.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2(x-1)}$.

Tìm trên đồ thị đó tất cả những điểm mà tọa độ của nó là những số nguyên.

4*. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 1. Giả sử M là một điểm tùy ý trong tam giác. Các đường thẳng AM, BM, CM lần lượt cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Gọi $BA' = x$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của tỷ số $y = \frac{BA'}{A'C}$.

b) Chứng minh rằng: $\frac{BA' \cdot CB' \cdot AC'}{A'C \cdot B'A \cdot C'B} = 1$.

5. Xác định dạng tổng quát của hàm số

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0), \text{ biết rằng:}$$

- 1) Hàm số không phải là hằng số.
- 2) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.
- 3) Trên đồ thị có hai cặp điểm đối xứng với nhau qua gốc toạ độ.

6. Cho phương trình: $(m - 2)x^2 - 4mx + 2m - 6 = 0$.

a) Tìm điều kiện để phương trình có nghiệm. Khảo sát và vẽ đồ thị sự biến thiên của tổng S và tích P của các nghiệm của phương trình.

b) Chứng minh rằng tồn tại một hệ thức liên hệ giữa S và P, không phụ thuộc vào m.

7. Cho hàm số $y = \frac{x + m}{x - m}$.

a) Với những giá trị nào của m, thì hàm số luôn luôn đồng biến khi $x > -1$?

b) Xác định m, sao cho đồ thị của hàm số không cắt trục tung

4. Khảo sát hàm phân thức: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$.

Để tránh rơi vào các trường hợp riêng đã xét, chúng ta giả thiết rằng:

Mẫu số là một nhị thức bậc nhất, tức là $p \neq 0$.

Tử số là một tam thức bậc hai, tức là $a \neq 0$.

Tử số không chia hết cho mẫu số, tức là y không phải là một hàm bậc nhất.

Khi đó lấy tử số chia cho mẫu số, ta có thể viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = Ax + B + \frac{C}{px + q}, \text{ trong đó: } A = \frac{a}{p} \neq 0; C \neq 0.$$

1. *Khoảng xác định.* Hàm số xác định với mọi $x \neq -\frac{q}{p}$.

2. *Chiều biến thiên.* Ta có $y' = A - \frac{Cp}{(px + q)^2} = \frac{A(px + q)^2 - Cp}{(px + q)^2}$

Chú ý rằng do $A \neq 0$, $p \neq 0$ nên tử số của y' là tam thức bậc hai và dấu của y' hoàn toàn phụ thuộc vào dấu của tử số.

Nghiệm của tử số là nghiệm của phương trình.

$$(px + q)^2 = \frac{Cp}{A}.$$

Có hai khả năng có thể xảy ra:

α) Nếu A và Cp trái dấu. Lúc đó y' vô nghiệm. Suy ra đạo hàm luôn luôn giữ dấu và hàm số luôn luôn đồng biến, hoặc luôn luôn nghịch biến trong từng khoảng xác định của nó tùy theo dấu của A , (nếu $A > 0$, hàm đồng biến; nếu $A < 0$, hàm nghịch biến).

β) Nếu A và Cp cùng dấu. Khi đó y' có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -\frac{q}{p} - \frac{1}{p} \sqrt{\frac{Cp}{A}}, x_2 = -\frac{q}{p} + \sqrt{\frac{Cp}{A}}$$

(dễ thấy hai nghiệm này đối xứng với nhau qua $x_0 = -\frac{q}{p}$).

Trong trường hợp này đạo hàm triệt tiêu và đổi dấu tại hai điểm đó. Vậy x_1, x_2 chính là hoành độ của các cực trị.

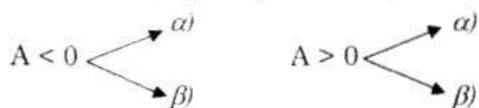
* Chú ý do $Cp \neq 0$, nên y' không bao giờ có nghiệm kép.

3. *Tiệm cận.* Đồ thị của hàm số có:

$$\text{tiệm cận đứng: } x = -\frac{q}{p} \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\frac{q}{p}} y = \infty);$$

$$\text{tiệm cận xiên: } y = Ax + B \quad (\text{vì } \lim_{x \rightarrow \infty} [y - (Ax + B)] = 0).$$

4. *Bảng biến thiên.* Chú ý rằng có thể xảy ra bốn khả năng:



nên có thể xảy ra bốn khả năng về bảng biến thiên. Dưới đây ta lập lại hai mẫu bảng biến thiên với trường hợp $A > 0$ và các khả năng $\alpha)$, $\beta)$.

		x	$-\infty$	$-q/p$	$+\infty$
{	$A > 0$	y'		+	+
	$\alpha)$	y			
			$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
				$-\infty$	$+\infty$

Bảng 28

		x	$-\infty$	x_1	$-q/p$	x_2	$+\infty$
{	$A > 0$	y'	+	0		-	0
	$\beta)$	y					
				M		$+\infty$	$+\infty$
			$-\infty$			m	$+\infty$

Bảng 29

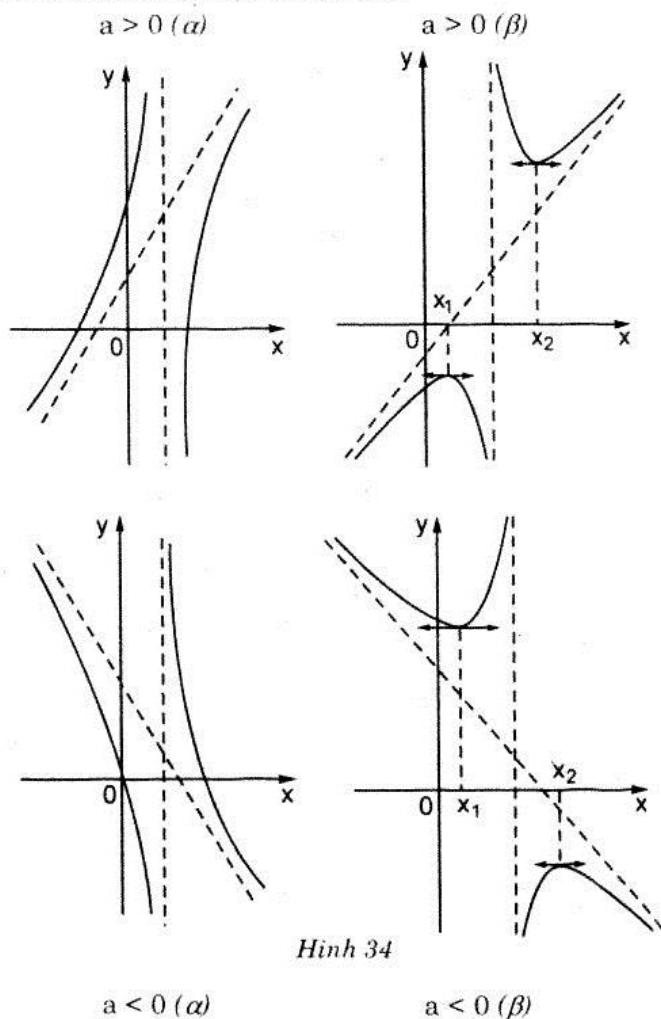
5. *Đồ thị.* Căn cứ vào các kết quả trên suy ra đồ thị của hàm số có và chỉ có một trong bốn dạng cơ bản cho trên hình 34.

Nhận xét: Giao điểm của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị (học sinh tự kiểm tra).

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x - m + 1}{x - m}$.

a) Với giá trị nào của m thì giao điểm của hai tiệm cận nằm trên parabol $y = x^2$?

b) Chứng minh rằng với mọi m hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu. Xác định m sao cho giá trị cực đại và giá trị cực tiểu cùng dấu, trái dấu. Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại và cực tiểu.



Hình 34

c) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 2$.

Giải: a) Hàm số đã cho có thể viết lại dưới dạng:

$$y = x + 2m + 1 + \frac{2m^2 + 1}{x - m}.$$

Ta dễ dàng suy ra đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng $x = m$; tiệm cận xiên $y = x + 2m + 1$. Từ đó suy ra tọa độ giao điểm của hai tiệm cận là:

$$x = m, y = 3m + 1.$$

Muốn giao điểm này nằm trên parabol $y = x^2$ (1) thì tọa độ của nó phải thỏa mãn phương trình (1). Tức là ta phải có:

$$3m + 1 = m^2$$

$$\text{hay là } m^2 - 3m - 1 = 0,$$

$$\text{hay là } m = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Vậy, với $m = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ hoặc $m = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}$ thì giao điểm của hai tiệm cận nằm trên parabol $y = x^2$.

$$\text{b) Ta có } y' = 1 - \frac{2m^2 + 1}{(x - m)^2} = \frac{x^2 - 2mx - (m^2 + 1)}{(x - m)^2}.$$

Tử số của y' có $\Delta' = 2m^2 + 1 > 0$ với mọi m . Vậy y' luôn luôn có hai nghiệm (hiển nhiên các nghiệm đó khác m , vì $-m^2 - (m^2 + 1) \neq 0$ với mọi m). Tức là hàm số đã cho luôn có cực đại và cực tiểu.

Trong trường hợp này, giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số cùng dấu tương đương với điều kiện đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt (bạn đọc tự giải thích tại sao), tức là phương trình $x^2 + (m + 1)x - m + 1 = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt, do đó $\Delta = m^2 + 6m - 3 > 0$ hay là $m < -3 - 2\sqrt{3}$ hoặc $m > -3 + 2\sqrt{3}$. Tương tự, giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số trái dấu khi đồ thị hàm số không

cắt trục hoành (bạn đọc tự giải thích vì sao), khi đó phương trình $x^2 + (m+1)x - m + 1 = 0$ vô nghiệm hay là $\Delta = m^2 + 6m - 3 < 0$, suy ra $-3 - 2\sqrt{3} < m < -3 + 2\sqrt{3}$.

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại cực tiểu. Giả sử 2 điểm cực trị là (x_1, y_1) và (x_2, y_2) , trong đó x_1, x_2 là nghiệm của y' , tức là của phương trình:

$$x^2 - 2mx - (m^2 + 1) = 0$$

do đó ta có: $x_1^2 - 2mx_1 - (m^2 + 1) = 0$, (i)

$$x_2^2 - 2mx_2 - (m^2 + 1) = 0. \quad (\text{ii})$$

Từ (i) suy ra $\frac{x_1^2 + (m+1)x_1 - m + 1}{x_1 - m} = 2x_1 + m + 1$

hay là $y_1 = 2x_1 + m + 1. \quad (*)$

Từ (ii) suy ra $\frac{x_2^2 + (m+1)x_2 - m + 1}{x_2 - m} = 2x_2 + m + 1$

hay là $y_2 = 2x_2 + m + 1. \quad (**)$

Từ (*) và (**) thấy rằng toạ độ hai điểm cực trị (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , thỏa mãn phương trình $y = 2x + m + 1$. Vậy đó chính là phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại cực tiểu.

Chú ý. Cách viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại và cực tiểu trong ví dụ này là minh họa cụ thể của bài toán sau:

Giả sử hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ ($a \neq 0, d \neq 0$) có cực đại, cực tiểu.

Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu.

Tính $y' = \frac{(2ax + b)(dx + e) - d(ax^2 + bx + c)}{(dx + e)^2}$.

Hoành độ x_1, x_2 của các điểm cực trị là nghiệm của y' , tức là:

$$(2ax_1 + b)(dx_1 + e) - d(ax_1^2 + bx_1 + c) = 0 \quad (\text{i})$$

$$(2ax_2 + b)(dx_2 + e) - d(ax_2^2 + bx_2 + c) = 0. \quad (\text{ii})$$

Từ (i) suy ra $\frac{ax_1^2 + bx_1 + c}{dx_1 + e} = \frac{2ax_1 + b}{d}$ hay $y_1 = \frac{2a}{d}x_1 + \frac{b}{d}$

Từ (ii) suy ra $\frac{ax_2^2 + bx_2 + c}{dx_2 + e} = \frac{2ax_2 + b}{d}$ hay $y_2 = \frac{2a}{d}x_2 + \frac{b}{d}$.

Vậy $y = \frac{2a}{d}x + \frac{b}{d}$ là phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu.

Cách 2. Trước hết tìm tọa độ các điểm cực trị. Giả sử chúng là (x_1, y_1) và (x_2, y_2) . Gọi đường thẳng cần tìm là $y = ax + b$. Khi đó có

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases}$$

Từ đây sẽ suy ra a và b .

Phương pháp này thường dùng khi việc tính (x_1, y_1) và (x_2, y_2) đơn giản và biểu thức của chúng không quá phức tạp.

c) Khi $m = 2$, hàm số đã cho có dạng:

$$y = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2} = x + 5 + \frac{9}{x - 2}.$$

Khoảng xác định. Hàm số xác định với mọi $x \neq 2$.

Chiều biến thiên. Ta có $y' = 1 - \frac{9}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x - 2)^2},$

$y' = 0$, khi $x = -1$ và $x = 5$;

$y' > 0$ khi $x < -1$ hoặc $x > 5$: trong các khoảng này hàm số đồng biến.

$y' < 0$ khi $-1 < x < 5$ ($x \neq 2$): trong các khoảng này hàm số nghịch biến.

Từ đó suy ra hàm số đạt cực đại bằng 1 khi $x = -1$ và hàm số đạt cực tiểu bằng 13 khi $x = 5$.

Tiệm cận. Đồ thị của hàm số có:

tiệm cận đứng $x = 2$ (vì $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2} = \infty$),

tiệm cận xiên: $y = x + 5$ (vì $\lim_{x \rightarrow \infty} |y - (x + 5)| = 0$).

Bảng biến thiên. Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
y'		+	0	-	
y					

$-\infty \nearrow 1/M \searrow -\infty$

$+\infty \searrow 13 \nearrow +\infty$

m

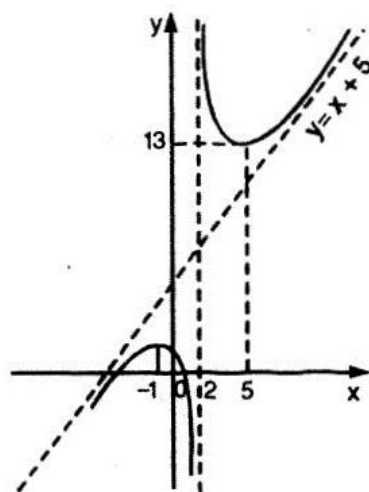
Bảng 30

Đồ thị: (xem hình 35). Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; \frac{1}{2})$ và cắt trục hoành tại các điểm $x = (-3 \pm \sqrt{13})/2$ (nghiệm của phương trình $x^2 + 3x - 1 = 0$).

Nhận xét. Giao điểm của hai tiệm cận $I(2, 7)$ là tâm đối xứng của đồ thị.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (m+1)x - 3}{x+m}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 2$. Tìm trên đồ thị đó tất cả những điểm mà toạ độ của nó là những số nguyên.



Hình 35

b) Với những giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số có dạng không bình thường? Dạng không bình thường này như thế nào?

Giải: a) Khi $m = 2$ hàm số đã cho có dạng:

$$y = \frac{2x^2 + 3x - 3}{x + 2} = 2x - 1 - \frac{1}{x + 2}.$$

* **Khoảng xác định.** Hàm số xác định với mọi $x \neq -2$.

* **Chiều biến thiên.** Ta có $y' = 2 + \frac{1}{(x+2)^2} > 0$ với mọi $x \neq -2$.

Vậy hàm số luôn luôn đồng biến trong từng khoảng xác định.

* **Tiệm cận.** Đồ thị của hàm số có:

tiệm cận đứng: $x = -2$ (vì $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 3}{x + 2} = \infty$),

tiệm cận xiên: $y = 2x - 1$ (vì $\lim_{x \rightarrow \infty} |y - (2x - 1)| = 0$).

* **Bảng biến thiên.** Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Bảng 31

* **Đồ thị.** Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; -\frac{3}{2})$ và cắt trục hoành tại hai điểm (hình 36):

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

Nhận xét. Đồ thị hàm số nhận giao điểm của hai tiệm cận $I(-2, -5)$ làm tâm đối xứng.

Tọa độ (x, y) của các điểm nguyên nằm trên đồ thị của hàm số thỏa mãn phương trình:

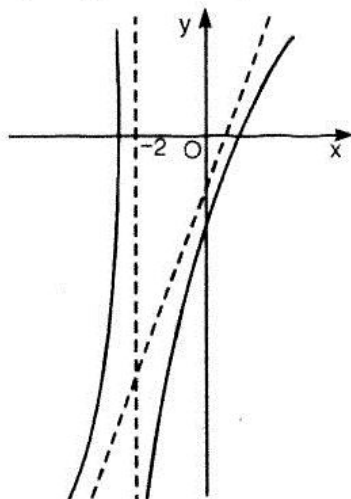
$$y = 2x - 1 - \frac{1}{x + 2}.$$

Từ đó suy ra $x + 2$ phải là ước số của 1, tức là $x + 2 = \pm 1$. Lần lượt thay các giá trị tương ứng, ta tìm được hai điểm nguyên:

$(-1, -4); (-3, -6)$.

b) Ta nhận thấy tử số của y luôn luôn là tam thức bậc hai, và mẫu số của y luôn luôn là nhị thức bậc nhất ($a \neq 0, p \neq 0$). Vậy đồ thị của hàm số sẽ suy biến (có dạng không bình thường) chỉ trong trường hợp tử số chia hết cho mẫu số. Ta viết hàm số lại dưới dạng:

$$y = 2x + (1-m) + \frac{m^2 - m - 3}{x + m}.$$



Hình 36

Do $m^2 - m - 3 = 0$, khi $m = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ nên ta có $y = 2x + (1 - m)$

(với mọi $x \neq -m$), khi $m = (1 \pm \sqrt{13})/2$.

Đồ thị của các hàm số này là một đường thẳng (trừ đi một điểm), đó chính là dạng không bình thường của đồ thị của hàm số đã cho.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b) Với những giá trị nào của a thì đường thẳng $y = ax + b$ cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt? Tìm quỹ tích điểm giữa của đoạn thẳng xác định bởi hai điểm đó.

c) Với a, b thỏa mãn điều kiện gì thì đường thẳng $y = ax + b$ cắt cả hai nhánh của đồ thị? Khi nào thì đường thẳng ấy chỉ cắt một nhánh của đồ thị?

d) Viết phương trình parabol đi qua điểm cực đại, cực tiểu và tiếp xúc với đường thẳng $y = -4$.

Giải: a) Bạn đọc tự khảo sát. Đồ thị có dạng dưới đây (hình 37).

d) Dựa vào đồ thị, có thể khẳng định được, nếu $a < -3$ hoặc $a > 5$ thì đường thẳng $y = a$ sẽ cắt đồ thị tại 2 điểm khác nhau. Chúng ta

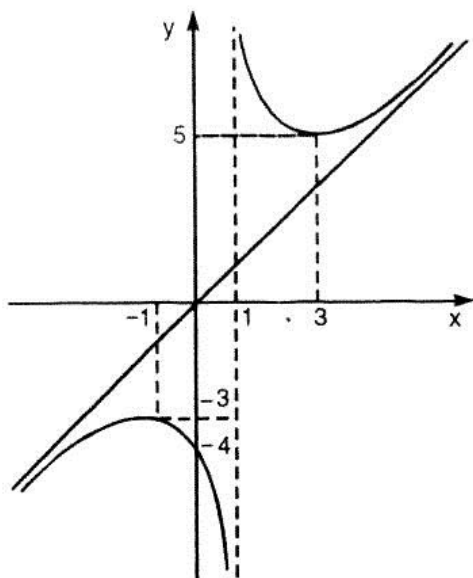
cũng có thể đi đến khẳng định đó bằng cách sau đây. Hoàn thiện các giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = a$$

hay là: $x^2 - (1 + a)x + (4 + a) = 0. \quad (*)$

Muốn đường thẳng $y = a$ cắt đường thẳng trên tại 2 điểm, thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm, do đó $\Delta = (1 + a)^2 - 4(4 + a) > 0$ hay là $a^2 - 2a - 15 > 0$, suy ra $a < -3$ hoặc $a > 5$. Bây giờ ta tìm quỹ tích điểm giữa của đoạn thẳng nối 2 giao điểm. Gọi điểm giữa đó là $I(x_1, y_1)$, ta có:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1 + a}{2} & (i) \\ y_1 = a & (ii) \end{cases} \quad (a < -3, a > 5).$$



Hình 37

Với $a < -3$, $a > 5$ ta có $x_1 < -1$, $x_1 > 3$. Từ (i) rút ra $a = 2x_1 - 1$, do đó $y_1 = 2x_1 - 1$.

Như vậy điểm I chạy trên 2 nửa đường thẳng xác định bởi $y = 2x - 1$, $x < -1$, $x > 3$.

Ngược lại lấy một điểm I bất kỳ trên 2 nửa đường thẳng đó, ta có $x_1 = \frac{a+1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_1$ là hoành độ điểm giữa xác định bởi hai giao điểm. Từ $x_1 < -1$, $x_1 > 3$ suy ra $a < -3$, $a > 5$. Vậy quỹ tích điểm giữa đoạn thẳng xác định bởi 2 giao điểm của đường thẳng $y = a$ và đồ thị là 2 nửa đường thẳng xác định bởi

$$y = 2x - 1, x < -1, x > 3.$$

c) Ta thấy rằng hai nhánh của đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng $x = 1$, do đó muốn đường thẳng $y = ax + b$ cắt cả hai nhánh của đồ thị thì phương trình $\frac{x^2 - x + 4}{x - 1} = ax + b$ phải có 2 nghiệm, trong đó một nghiệm nhỏ hơn 1 còn nghiệm kia lớn hơn 1, tức là số 1 nằm trong khoảng 2 nghiệm của phương trình

$$(a - 1)x^2 + (b - a + 1)x - (b + 4) = 0. \quad (**)$$

Gọi vế trái của phương trình (**) là f , ta phải có

$$\begin{cases} a \neq 1 \\ (a - 1).f(1) < 0 \end{cases}$$

hay là $-4(a - 1) < 0$, suy ra $a > 1$.

Vậy với $a > 1$ (và với mọi b) đường thẳng $y = ax + b$ cắt cả hai nhánh của đồ thị.

*) Muốn đường thẳng $y = ax + b$ chỉ cắt tại một nhánh của đồ thị thì phương trình (**) phải có nghiệm và các nghiệm đó cùng nhỏ hơn 1 hoặc cùng lớn hơn 1, tức là phải thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta = (b - a + 1)^2 - 4(a - 1)(b + 4) = \\ = b^2 + 2(a - 1)b + (a - 1)^2 + 16(a - 1) \geq 0 \\ (a - 1)f(1) = -4(a - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\text{suy ra } \begin{cases} a < 1 \\ b \leq 1 - a - 4\sqrt{1 - a}, b \geq 1 - a + 4\sqrt{1 - a}. \end{cases}$$

Nhận xét ()* Nếu $a = 1$ phương trình (**) trở thành $bx = b$ hay $x = 1$, không nằm trong miền xác định của hàm số đã cho.

(*) Nếu $a = 0$, đường thẳng trở thành $y = b$, chúng ta có trường hợp ở câu b), đường thẳng này cắt một nhánh đồ thị khi $b \leq -3$ hoặc $b \geq 5$.

d) Theo câu a) điểm cực đại của hàm số là $(3, 5)$, điểm cực tiểu là $(-1, -3)$.

Gọi parabol cần tìm là $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Parabol này chỉ có thể tiếp xúc với đường thẳng $y = -4$ tại đỉnh nên có

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -4 \text{ hay } b^2 - 4ac = 16a.$$

Kết hợp với các điều kiện parabol đi qua $(3, 5)$ và $(-1, -3)$ ta được hệ

$$\begin{cases} b^2 - 4ac = 16a \\ 9a + 3b + c = 5 \\ a - b + c = -3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } a = 1, b = 0, c = -4 \text{ và } a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{2}, c = -\frac{7}{4}$$

Vậy có 2 parabol thỏa mãn yêu cầu của đầu bài là

$$y = x^2 - 4 \text{ và } y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}.$$

BÀI TẬP

1. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + m}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 2$. Chứng minh rằng giao điểm của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

b) Chứng minh rằng có hai giá trị của m , làm cho đồ thị của hàm số có dạng không bình thường. Dạng không bình thường này như thế nào?

2. a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 4x}{4x + 2}$.

b) Cho phương trình $y - x = \sqrt{y^2 + 2(x+1)y + 4x}$, trong đó y là ẩn số. Hãy tìm những giá trị của x để phương trình có nghiệm.

3. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - m(x+1)x + m^3 + 1}{x - m}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 1$.

b) Chứng minh rằng với mọi m , hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu. Xác định tọa độ các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị.

c) Giả sử m là một số nguyên. Tìm trên đồ thị những điểm (x, y) với tọa độ x, y là những số nguyên.

4*. Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$.

a) Các số a, b, c, d phải thỏa mãn điều kiện gì để trên đồ thị hàm số có một cặp điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

b) Chứng minh rằng nếu trên đồ thị có hai cặp điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ thì gốc tọa độ là tâm đối xứng của đồ thị.

5. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx + m - 1}{x + 1}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 2$.

b) Xác định m sao cho giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số cùng dấu.

6*. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3mx + 3m^2}{x - 2m}$.

a) Với những giá trị nào của m , thì hàm số luôn luôn đồng biến trong từng khoảng xác định của nó ?

b) Xác định những giá trị của m sao cho hàm số đồng biến khi $x \geq 1$.

7. Cho hàm số $y = \frac{2mx^2 - m(m+4)x}{x-2}$, ($m \neq 0$).

a) Chứng minh rằng hàm số không thể luôn luôn nghịch biến.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -1$.

8. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x + 2 + \frac{1}{x-1}$. Tìm trên đồ thị những điểm cách đều 2 trục tọa độ.

b) Với những giá trị nào của m thì trên đồ thị của hàm số có 2 điểm $M_1(x_1, y_1)$ và $M_2(x_2, y_2)$ sao cho $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = m$?

Chứng tỏ rằng khi đó 2 điểm M_1, M_2 cùng nằm trên một nhánh của đồ thị.

c) Với những giá trị nào của k , đường thẳng $y = kx - k + 2$ cắt đồ thị tại 2 điểm nằm trên 2 nhánh khác nhau.

9. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + m^2}{x+1}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $m = -1$. Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại và cực tiểu.

b) Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu. Tìm quỹ tích điểm cực tiểu khi m thay đổi. Với giá trị nào của m thì giá trị cực đại và giá trị cực tiểu cùng dấu ?

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi $\neq 1$, đồ thị hàm số luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định. Xác định đường thẳng ấy.

10. Cho hàm số $y = \frac{2m^2x^2 + (2-m^2)(mx+1)}{mx+1}$, $m \neq 0$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 2$. Viết phương trình parabol đi qua điểm cực đại, cực tiểu và tiếp xúc với đường thẳng $y = -10$.

b) Chứng minh rằng, nếu $m \neq 0$ thì đồ thị của hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu. Với giá trị nào của m thì giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu.

c) Chứng minh rằng với mọi giá trị $m \neq 0$, tiệm cận xiên của đồ thị luôn luôn tiếp xúc với một parabol cố định. Xác định phương trình parabol ấy.

11. a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$.

b) Viết phương trình các tiếp tuyến với đồ thị nói trên vuông góc với tiệm cận xiên. Tính diện tích tam giác giới hạn bởi hai đường tiệm cận và một tiếp tuyến vừa tìm được.

c) Chứng minh rằng, ứng với mỗi điểm A cho trước trên đồ thị tồn tại duy nhất một điểm B trên đồ thị có tiếp tuyến song song với tiếp tuyến tại điểm A. Chứng minh rằng khi A thay đổi trên đồ thị, đường thẳng nối A và B luôn đồng qui tại một điểm cố định.

5. Khảo sát hàm phân thức: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$.

Để tránh rơi vào các trường hợp riêng đã xét, ta giả thiết rằng: a, b, c không đồng thời bằng 0.

$p \neq 0$; tử số ($ax^2 + bx + c$) và mẫu số ($px^2 + qx + r$) không chia hết cho nhau.

Việc khảo sát tổng quát hàm số này phức tạp hơn nhiều so với những hàm số đã khảo sát ở trên. Do đó chúng ta sẽ chỉ sơ bộ nêu các dấu hiệu có thể có của đồ thị hàm số. Các bước của khảo sát được tiến hành như đã trình bày ở các phần trên. Đồ thị của hàm số này có một số tính chất chung sau đây:

1) Luôn luôn có một tiệm cận ngang.

2) Số tiệm cận đứng phụ thuộc vào số nghiệm của mẫu số:

* Nếu $\Delta = q^2 - 4qr < 0$: Đồ thị không có tiệm cận đứng, đồ thị chỉ có một nhánh.

* Nếu $\Delta = q^2 - 4pr = 0$: Đồ thị có 1 tiệm cận đứng $x = \frac{-q}{2p}$ và đồ thị có 2 nhánh nằm về 2 phía của tiệm cận đứng đó.

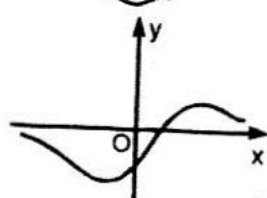
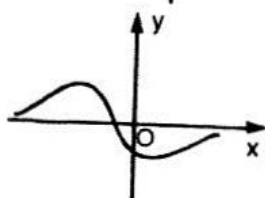
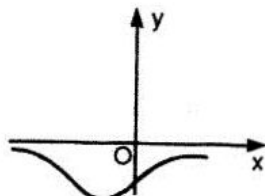
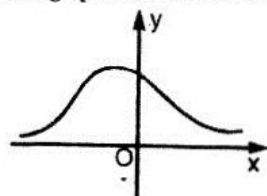
* Nếu $\Delta = q^2 - 4qr > 0$: Đồ thị có 2 tiệm cận đứng là $x = (-q \pm \sqrt{\Delta})/2p$ và đồ thị gồm có 3 nhánh.

Vì có thể viết $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} = A + \frac{Bx + C}{px^2 + qx + r}$ nên đồ thị

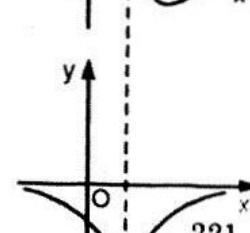
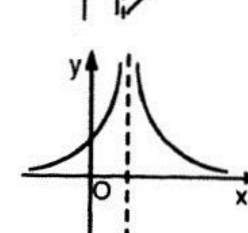
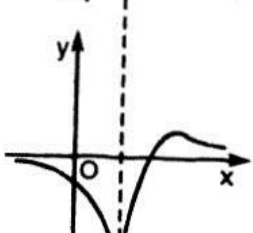
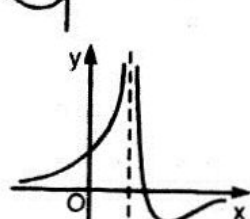
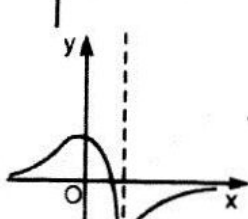
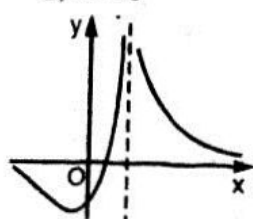
hàm số đã cho và đồ thị $y = \frac{Bx + C}{px^2 + qx + r}$ có cùng một dạng. Do

đó không giảm tổng quát chỉ cần xét

1) $\Delta < 0$



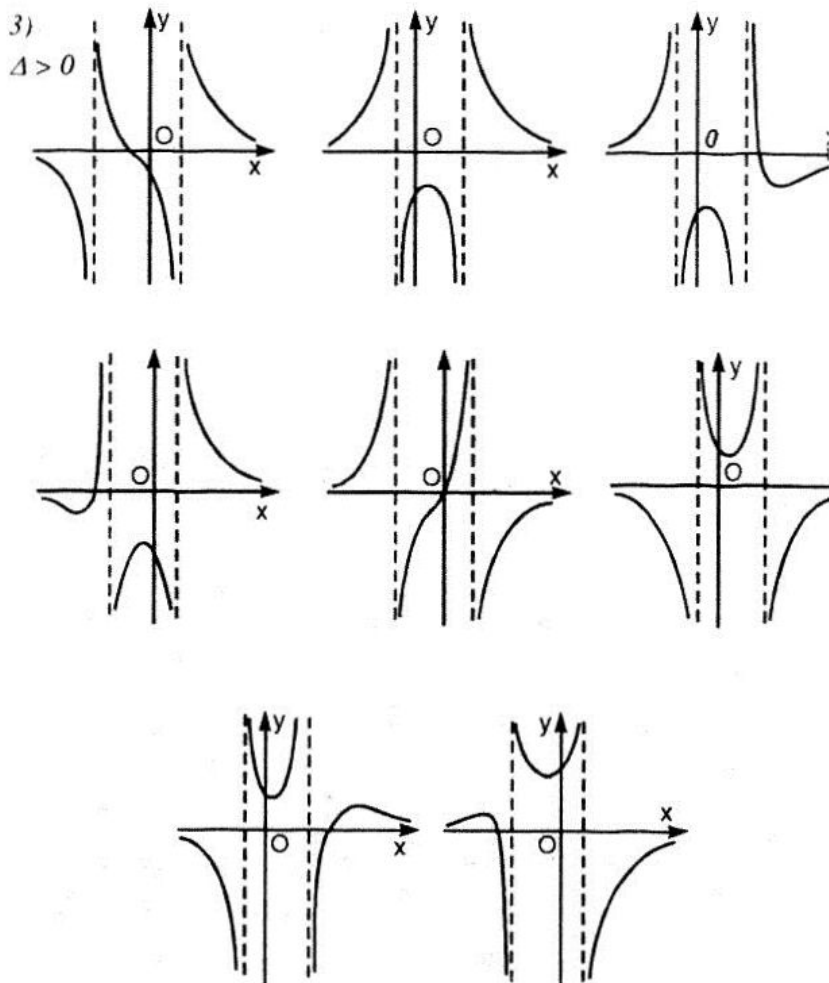
2) $\Delta = 0$



Hình 38

$$y = \frac{Bx + C}{px^2 + qx + r}$$

Đồ thị hàm số có thể có một trong các dạng sau đây:



Hình 38 (tiếp)

Những đồ thị này tăng tiến lên (hoặc xuống) A đơn vị sẽ được đồ thị hàm số

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}.$$

Ví dụ. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 - 8x - 12}{x^2 - x - 2}.$$

Giải: Hàm số đã cho có thể viết dưới dạng

$$y = 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{8}{x-2}$$

1) *Khoảng xác định:* Hàm số xác định với mọi $x \neq -1$ và $x \neq 2$.

2) *Chiều biến thiên:*

$$y' = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{8}{(x-2)^2}$$

Cho $y' = 0$ ta được $(x-2)^2 = 8(x+1)^2$ hay là $7x^2 + 20x + 4 = 0$ ta được 2 nghiệm $x_{1,2} = (-10 \pm \sqrt{72})/7$.

$$\text{Xét dấu: } y' = \frac{7x^2 + 20x + 4}{(x+1)^2(x-2)^2}.$$

Dấu của y' trùng với dấu của tử số $(7x^2 + 20x + 4)$ nên qua $x = (-10 - \sqrt{72})/7$ thì y' đổi dấu từ dương sang âm nên đó là hoành độ điểm cực đại và qua $x = (-10 + \sqrt{72})/7$ thì y' đổi dấu từ âm sang dương nên đó là hoành độ điểm cực tiểu. Ta có

$$x_{\max} = \frac{-10 - \sqrt{72}}{7}, \quad y_{\max} = \frac{144 + 76\sqrt{72}}{144 + 27\sqrt{72}}$$

$$x_{\min} = \frac{-10 + \sqrt{72}}{7}, \quad y_{\min} = \frac{144 - 76\sqrt{72}}{144 - 27\sqrt{72}}.$$

$$3) \text{ Điểm uốn: } y'' = \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{16}{(x-2)^3};$$

$y'' = 0 \Rightarrow (x - 2)^3 = 8(x + 1)^3 \Rightarrow x - 2 = 2(x + 1) \Rightarrow x = -4$ và y'' đổi dấu từ dương sang âm, vậy đó là hoành độ điểm uốn.

$$x_u = -4, y_u = 2.$$

4) *Tiệm cận*: Tiệm cận ngang $y = 1$, vì

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 8x - 12}{x^2 - x - 2} = 1.$$

Đồ thị có 2 tiệm cận đứng là

$$x = -1, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow -1} \left| 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{8}{x-2} \right| = \infty;$$

$$x = 2, \text{ vì } \lim_{x \rightarrow 2} \left| 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{8}{x-2} \right| = \infty;$$

5) *Bảng biến thiên*:

x	$-\infty$	-4	$(-10-\sqrt{72})/7$	-1	$(-10+\sqrt{72})/7$	2	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	2	$y_{\max}$ 		$-\infty$	$y_{\min}$ 		4

Bảng 32

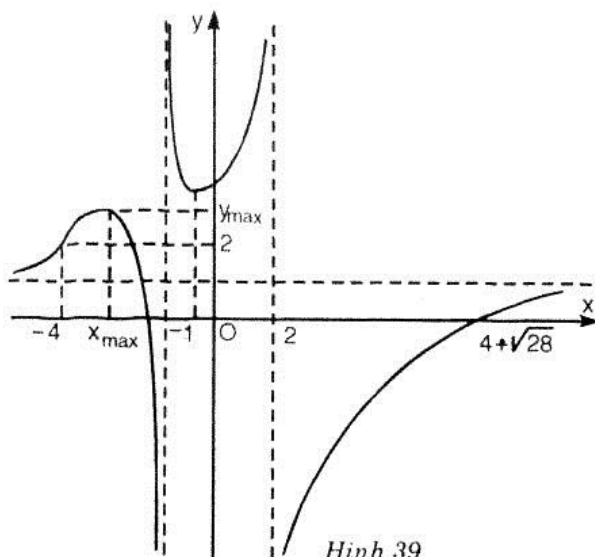
6. *Đồ thị* (hình 39):

$$x = 0, \quad y = 6;$$

$$y = 0, \quad x = 4 \pm \sqrt{28}.$$

BÀI TẬP

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:



Hình 39

a) $y = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$;

b) $y = \frac{x+2}{x^2-4x+13}$;

c) $y = 1 + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2}$;

d) $y = \frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}$;

2. Xác định p và q sao cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + px + q}{x^2 + 1}$$

có giá trị lớn nhất bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

3*. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + px + q}{x^2 - x + 1}$.

a) Chứng minh rằng nếu hàm số không phải là một hằng số, thì nó không thể luôn luôn đồng biến hoặc luôn luôn nghịch biến.

b) Xác định q sao cho các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị có hoành độ không phụ thuộc vào p.

4*. Cho hàm số $y = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 - x + 1}$.

Xác định α và β , sao cho hàm số có cực tiểu, không có cực đại và đồ thị của hàm số có một phần nằm ở phía dưới đường thẳng $y = -1$.

5*. Xác định các hệ số a và p sao cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + ax + 3}{x^2 + px + 4}$$

có các tính chất sau:

- 1) đồ thị chỉ có 1 tiệm cận đứng;
- 2) hàm số đạt cực trị tại $x = 0$;
- 3) hàm số nghịch biến trên khoảng $(4, +\infty)$.

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số ứng với a, p tìm được.

§2. Các phép biến đổi đồ thị

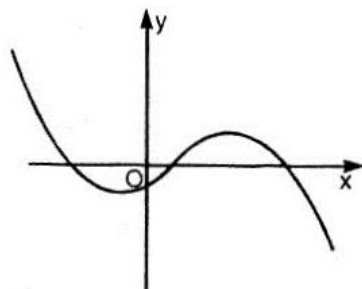
I. Đồ thị của hàm số có dấu giá trị tuyệt đối

Các phép biến đổi chính trong phần này là phép lấy đối xứng qua các trục tọa độ. Cơ sở của nó là các nhận xét sau đây:

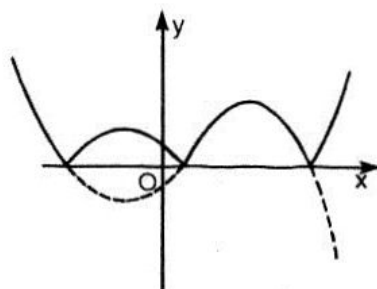
- *) Hai điểm (x, y) ; $(x, -y)$ đối xứng với nhau qua trục hoành.
- **) Hai điểm (x, y) ; $(-x, y)$ đối xứng với nhau qua trục tung.

Để suy ra đồ thị có chứa dấu giá trị tuyệt đối từ một đồ thị đã biết, chúng ta chia thành các trường hợp sau đây:

- 1) Cần suy ra đồ thị $y = |f(x)|$ nếu đã biết đồ thị $y = f(x)$.



Hình 40a



Hình 40b

Theo định nghĩa trị số tuyệt đối ta có:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0. \end{cases}$$

Từ đây suy ra quy tắc: Nếu biết đồ thị $y = f(x)$, để nhận được đồ thị $y = |f(x)|$ ta làm như sau:

Giữ nguyên phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Lấy đối xứng phần đồ thị nằm dưới trục hoành của $y = f(x)$ qua trục hoành. Bỏ phần đồ thị nằm dưới trục hoành.

(Ví dụ: biết đồ thị $y = f(x)$ ở hình 40a, thì đồ thị $y = |f(x)|$ là đường liền nét ở hình 40b).

2) Cần suy ra đồ thị $y = f(|x|)$ từ đồ thị đã biết $y = f(x)$.

$$\text{Ta có } y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Từ đây suy ra quy tắc: Nếu biết đường thẳng $y = f(x)$, để nhận được đồ thị $y = f(|x|)$ ta làm như sau:

Giữ nguyên phần nằm bên phải trục tung của đồ thị $y = f(x)$.

Bỏ phần nằm bên trái trục tung của đồ thị $y = f(x)$.

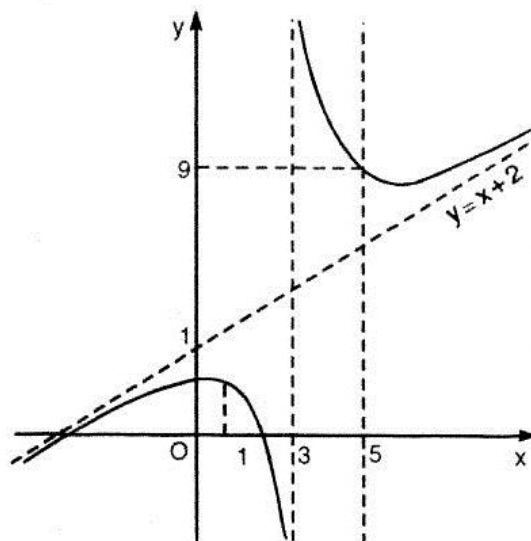
Lấy đối xứng phần đồ thị đã được giữ lại qua trục tung.

(Nhận xét: hàm số $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên đồ thị của nó đối xứng qua trục tung).

Ví dụ 1. a) Khảo sát và vẽ đồ thị $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$.

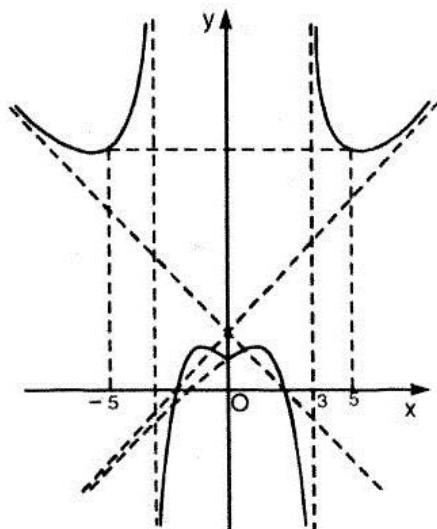
b) Từ đó suy ra đồ thị $y = \frac{x^2 - |x| - 2}{|x| - 3}$.

Giải: a) Bạn đọc tự khảo sát hàm số. Đồ thị có dạng như ở hình 41.



Hình 41

b) Đồ thị $y = \frac{x^2 - |x| - 2}{|x| - 3}$ là phân liên nét ở hình 42.



Hình 42

3) Cần suy đồ thị $|y| = f(x)$ nếu biết đồ thị $y = f(x)$.
Ta thấy:

$$|y| = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ y = \pm f(x) \end{cases}$$

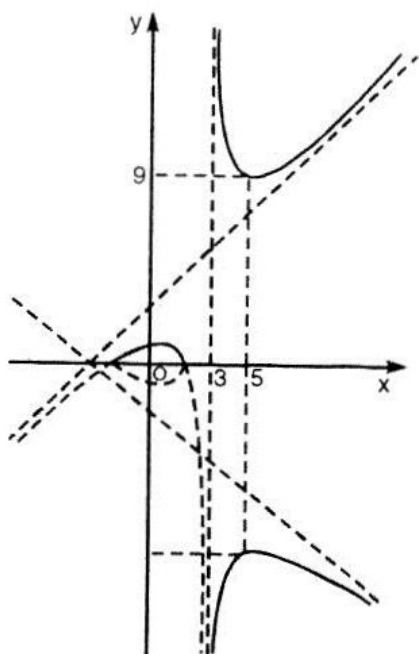
(nên $|y| = f(x)$ được coi là hàm đa trị của y theo x).

Ta suy ra quy tắc sau:
Nếu biết đồ thị $y = f(x)$ để nhận được đồ thị $|y| = f(x)$ ta làm như sau:

Giữ nguyên phần đồ thị của $f(x)$ nằm phía trên trục hoành.

Bỏ phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm dưới trục hoành.

Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị được giữ lại.



Hình 43

Ví dụ 2. a) Khảo sát và vẽ đồ thị

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}.$$

b) Từ đó suy ra đồ thị

$$|y| = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}.$$

Giải: a) Như ví dụ 1, ta có đồ thị dạng ở hình 41.

b) Đồ thị $|y| = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$ là phần liên nét ở hình 43.

Nhận xét: Từ ba dạng trên ta có thể suy ra đồ thị phức tạp hơn như $|y| = f(|y|)$ từ đồ thị $y = f(x)$.

Thật vậy, ta tiến hành dần từng bước như sau:

$$y = f(x) \Rightarrow y = f(|x|) \Rightarrow y = |f(|x|)| \Leftrightarrow |y| = |f(|x|)|.$$

4) Nếu biết đồ thị $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, có thể suy ra đồ thị

$y = \frac{|P(x)|}{Q(x)}$ như sau:

$$\text{Ta có } y = \frac{|P(x)|}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{P(x)}{Q(x)} & \text{nếu } P(x) \geq 0 \\ -\frac{P(x)}{Q(x)} & \text{nếu } P(x) < 0. \end{cases}$$

Tức là chúng ta giữ nguyên phần đồ thị tương ứng với tử số $P(x) \geq 0$.

Tương tự như vậy, có thể suy ra đồ thị

$$y = \frac{|P(x)|}{Q(x)}.$$

Ví dụ 3. a) Khảo sát và vẽ đồ thị

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}.$$

b) Từ đó suy ra đồ thị

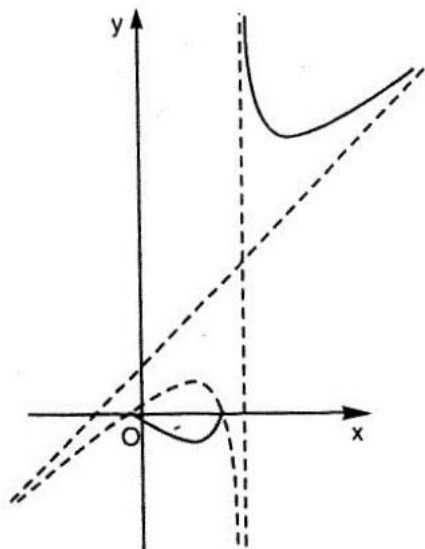
$$y = \frac{|x^2 - x - 2|}{x - 3}.$$

c) Suy ra đồ thị

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{|x - 3|}.$$

Giải: a) Như câu a, ví dụ 1 và có đồ thị dạng (hình 41).

b) Ta có



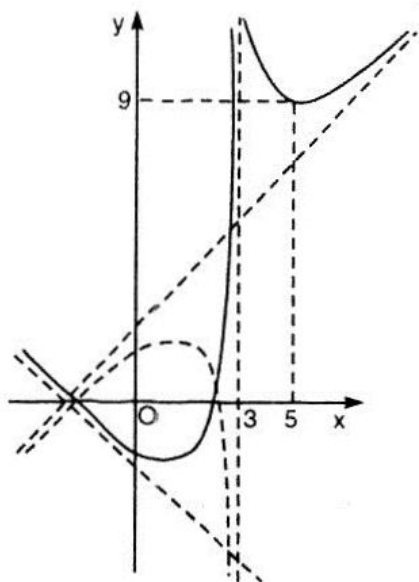
Hình 44

$$y = \frac{|x^2 - x - 2|}{x - 3} = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} & \text{nếu } x \leq -1 \\ \text{hoặc } x \geq 2, x \neq 3 \\ -\frac{x^2 - x - 2}{x - 3} & \text{nếu } -1 < x < 2. \end{cases}$$

Đồ thị là phần liên nét ở hình 44.

$$c) \text{ Ta có } y = \frac{x^2 - x - 2}{|x - 3|} = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} & \text{nếu } x > 3 \\ -\frac{x^2 - x - 2}{x - 3} & \text{nếu } x < 3. \end{cases}$$

Đồ thị là phần liên nét ở hình 45.



Nhận xét: Qua các phép lấy đối xứng trên, ta thấy rằng nếu đồ thị có tiệm cận thì khi lấy đối xứng qua trục nào, tiệm cận phải lấy đối xứng qua trục đó.

5) Vẽ đồ thị hàm số dạng $y = |f_1(x)| + |f_2(x)| + \dots + |f_k(x)| + g(x)$.

Đối với dạng hàm số này, ta vẽ đồ thị trên từng khoảng mà ở đó các biểu thức trong dấu trị số tuyệt đối không đổi dấu.

Ví dụ 4. Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = |x - 2| + 2|1 - x| - 4x + 2$$

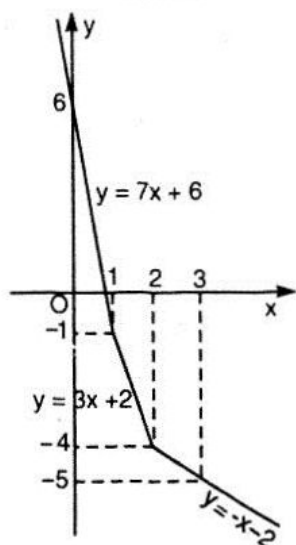
Giải: Chúng ta xét dấu

Hình 45

hai biểu thức trong dấu trị số tuyệt đối

x	1	2
$x - 2$	-	0
$1 - x$	+	-

Bảng 33



Hình 46

Dựa vào bảng xét dấu trên, ta thấy cần phải vẽ đồ thị hàm số trên ba khoảng là $x < 1$, $1 \leq x < 2$ và $x \geq 2$. Ta có

$$y = \begin{cases} -7x + 6 & \text{nếu } x < 1 \\ -3x + 2 & \text{nếu } 1 \leq x < 2 \\ -x - 2 & \text{nếu } x \geq 2. \end{cases}$$

Chúng ta có đồ thị như ở hình 46.

BÀI TẬP

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của

hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$

Hãy suy ra đồ thị của hàm số:

a) $y = \left| \frac{x+2}{x-2} \right|$; b) $y = \frac{|x|+2}{|x|-2}$; c) $y = \frac{x+2}{|x-2|}$.

d) Hãy suy ra đồ thị của biểu thức $|y| = \frac{x+2}{x-2}$.

2. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = 2^{|x|}$; b) $y = \sin x + |\sin x|$; c) $y = \sin(|x|)$;

$$d) y = |x - 2| + |x - 3| ; \quad e) y = 2 - |1 - |x||.$$

3. [A-1971]. Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = |x - 2| - 2|x - 3| - 3|x + 1|.$$

4. a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

b) Hãy suy ra đồ thị hàm số $y = |x|^3 - 3x^2 - 1$.

5. Với những giá trị nào của m thì:

$$|x - 1| + 3|x - 2| \geq m \text{ với mọi } x \in [0; 2]$$

II. Phép tịnh tiến song song với các trục tọa độ

Quy tắc chung.

1) Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có thể nhận được đồ thị hàm số $y = f(x + a)$ theo quy tắc sau đây:

* nếu $a > 0$, thì tịnh tiến đồ thị đã cho về bên trái (song song với trục hoành) một đoạn bằng a .

** nếu $a < 0$, thì tịnh tiến đồ thị đã cho về bên phải (song song với trục hoành) một đoạn bằng $|a|$.

2) Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có thể suy ra đồ thị hàm số $y = f(x) + b$ bằng cách:

* nếu $b > 0$, thì tịnh tiến đồ thị đã cho lên phía trên (song song với trục tung) một đoạn bằng b .

** nếu $b < 0$, thì tịnh tiến đồ thị đã cho xuống phía dưới (song song với trục tung) một đoạn bằng $|b|$.

Ví dụ 1. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x}$. Hãy suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x+1}$.

Giải: Ta viết hàm số đã cho dưới dạng $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

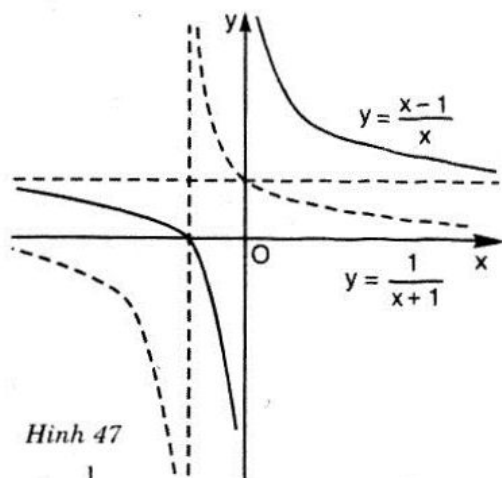
Khi đó $f(x+1) = 1 + \frac{1}{x+1}$.

Từ đó: $\frac{1}{1+x} = f(x+1) - 1$.

Vậy theo quy tắc đã nêu ở trên, ta suy ra có thể nhận được đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x+1}$ từ đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x}$ bằng cách tịnh tiến đồ thị đã cho về bên trái (song song với trục hoành) một đoạn bằng 1, sau đó, tịnh tiến đồ thị vừa nhận được (song song với trục tung) xuống phía dưới một đoạn bằng 1 (hình 47).

Chú ý: Để vẽ cho chính xác, ta cần thực hiện các phép tịnh tiến đối với cả các đường tiệm cận tương ứng của đồ thị (nếu có).

Ví dụ 2. Cho đồ thị của hàm số $y = x + \frac{1}{x-1}$. Hãy suy ra đồ thị hàm số $y = x - 1 + \frac{1}{x-1}$.



Hình 47

Giải: Xét hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$.

Khi đó $f(x+2) = x+2 + \frac{1}{x+1}$,

hay là $x-1 + \frac{1}{x+1} = f(x+2) - 3$.

Vậy từ đồ thị hàm số $y = x + \frac{1}{x-1}$ ta có thể suy ra đồ thị

hàm số $y = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ bằng cách tịnh tiến (song song với trục hoành) về bên trái một đoạn bằng 2, sau đó, tịnh tiến đồ thị vừa nhận được xuống phía dưới (song song với trục tung) một đoạn bằng 3.

Phương pháp chung:

Qua cách giải hai ví dụ trên, ta nhận thấy rằng để thực hiện được phép biến đổi từ đồ thị $y = f(x)$ thành đồ thị $y = g(x)$ bằng các phép tịnh tiến song song với các trục tọa độ ta cần phải xác định các số a và b sao cho:

$$g(x) = f(x + a) + b$$

được thỏa mãn với mọi x để biểu thức có nghĩa.

Ví dụ 3. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x + 1$. Hãy suy ra đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$ (bằng các phép tịnh tiến song song với các trục tọa độ).

Giải: Đặt $y = x^3 + 3x + 1$. Ta cần xác định các số a và b sao cho:

$$f(x + a) + b = x^3 - 3x^2 + 6x + 2, \text{ với mọi } x,$$

hay là: $(x + a)^3 + 3(x + a) + 1 + b = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$, với mọi x , hay là $3(a + 1)x^2 + 3(a^2 - 1)x + a^3 + b - 1 = 0$, với mọi x . Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} a + 1 = 0, \\ a^2 - 1 = 0, \\ a^3 + b - 1 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $a = -1$, $b = 2$.

Vậy, bằng cách tịnh tiến đồ thị đã cho về bên phải (song song với trục hoành) một đoạn bằng 1, sau đó, tịnh tiến đồ thị vừa nhận được lên phía trên (song song với trục tung) một đoạn bằng 2. Ta nhận được đồ thị của $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 2$.

Ví dụ 4. Hãy nêu phương pháp suy từ đồ thị $y = x^2$ thành đồ thị hàm số $y = x^2 + \alpha x + \beta$ (bằng các phép tịnh tiến song song với các trục tọa độ).

Giải: Đặt $f(x) = x^2$. Ta cần xác định các giá trị a và b sao cho:

$$f(x + a) + b = x^2 + \alpha x + \beta, \text{ với mọi } x,$$

$$\text{hay là: } (x + a)^2 + b = x^2 + \alpha x + \beta, \text{ với mọi } x,$$

$$\text{hay là: } (2a - \alpha)x + a^2 + b - \beta = 0, \text{ với mọi } x.$$

Điều này tương đương với:

$$\begin{cases} 2a - \alpha = 0, \\ a^2 + b - \beta = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được:

$$a = \frac{\alpha}{2}; \quad b = \beta - \frac{\alpha^2}{4}.$$

Vậy, từ đồ thị $y = x^2$ ta suy ra đồ thị $y = x^2 + \alpha x + \beta$ bằng cách tịnh tiến đồ thị đã cho về bên trái (nếu $\alpha > 0$), hoặc về bên phải (nếu $\alpha < 0$) một đoạn bằng $|\alpha|/2$, sau đó tịnh tiến đồ thị nhận được lên phía trên (nếu $\beta - \alpha^2/4 > 0$) hoặc xuống phía dưới (nếu $\beta - \alpha^2/4 < 0$) một đoạn bằng $|\beta - \alpha^2/4|$.

Ví dụ 5. (Bài toán ngược). Chứng minh rằng: điều kiện cần và đủ để từ đồ thị của hàm $y = x^2 + \alpha x + \beta$ ta có thể suy ra được đồ thị của $y = cx^2$ bằng các phép tịnh tiến song song với các trục tọa độ là $c = 1$.

Giải: *Điều kiện cần.* Giả sử từ đồ thị

$f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$, ta có thể suy ra được đồ thị $y = cx^2$. Khi đó tồn tại các số a, b sao cho

$$f(x + a) + b = cx^2, \text{ với mọi } x.$$

$$\text{Hay là: } (x + a)^2 + \alpha(x + a) + \beta + b = cx^2, \text{ với mọi } x.$$

$$\text{Hay là: } (1 - c)x^2 + (2a + \alpha)x + a^2 + \alpha a + \beta + b, \text{ với mọi } x.$$

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} 1 - c = 0, \\ 2a + \alpha = 0, \\ a^2 + \alpha a + \beta + b = 0. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được:

$$c = 1; \quad a = -\frac{\alpha}{2}; \quad b = \frac{\alpha^2}{4} - \beta.$$

Vậy $c = 1$ là điều kiện cần để từ đồ thị $y = x^2 + \alpha x + \beta$ có thể suy ra được đồ thị $y = cx^2$.

Điều kiện đủ. Giả sử $c = 1$. Khi đó theo kết quả ở ví dụ 4, nếu chọn

$$a = -\frac{\alpha}{2}, \quad b = \frac{\alpha^2}{4} - \beta, \quad \text{thì}$$

$f(x+a) + b = cx^2$. Tức là, từ đồ thị hàm số $y = x^2 + \alpha x + \beta$ có thể suy ra đồ thị hàm số $y = cx^2$, ($c = 1$).

Vậy $c = 1$ là điều kiện cần và đủ để từ đồ thị $y = x^2 + \alpha x + \beta$ có thể suy ra được đồ thị $y = cx^2$ bằng các phép tịnh tiến song song với các trục tọa độ.

BÀI TẬP

1. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$, hãy suy ra đồ thị của hàm

$$\text{số } y = \frac{-x-1}{x+3}.$$

2. Cho đồ thị của hàm số $y = 2x + \frac{1}{x-1}$, hãy suy ra đồ thị

$$\text{hàm số } y = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

3. Cho đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$, hãy suy ra đồ thị hàm số

$$y = \frac{x}{x+1}.$$

4. Cho đồ thị của hàm số $y = x^2 - x + 2$, hãy suy ra đồ thị của hàm số $y = x^2 + x - 2$.

5. Cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2}{x-2}$, hãy suy ra đồ thị của hàm số $y = \frac{4+x^2}{x}$.

6*. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để từ đồ thị của $y = x^3 + x + 1$ có thể suy ra đồ thị của $y = x^3 + \alpha x + \beta$ (bằng các phép tịnh tiến song song với các trục) là $\alpha = 1$.

7*. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để từ đồ thị của $y = x + \frac{\alpha}{x}$ có thể suy ra được đồ thị của $y = x + \frac{1}{x-1}$ bằng các phép tịnh tiến song song với các trục là $\alpha = 1$.

8*. Hãy xác định các giá trị α, β sao cho từ đồ thị của $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ ta có thể suy ra được đồ thị của $y = \alpha x + \frac{\beta}{x}$.

9*. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để từ đồ thị của $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ có thể suy ra được đồ thị của $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ bằng các phép tịnh tiến song song là $a_1 = a_2$.

10*. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để từ đồ thị $y = Ax + B + \frac{C}{x+p}$ có thể suy ra được đồ thị $y = ax + b + \frac{c}{x+q}$ bằng các phép tịnh tiến song song là $A = a$ và $C = c$.

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ TÀI TẬP

Chương IV

§1.

1. Kiến thức chuẩn bị

a) Cực đại và cực tiểu của một hàm số.

$$1. \frac{1-\sqrt{7}}{3} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{3} \text{ và } m = -1.$$

2. a) Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu bằng -4 .

b) $m = 2$.

3. a) $a = 3$; $b = 0$; $c = -4$; b) $3 + 2a + b < 0$; c tùy ý.

4. Thường trong phép chia $P(x)$ cho $x^2 + x + 1$ là một nhị thức bậc nhất có dạng $ax + b$. Vậy ta có:

$P(x) = (x^2 + x + 1)(ax + b) + 5(3x + 1)$ và với $x = 1$ thì $P(1) = 2$. vậy $a + b = -6(1)$.

Mặt khác $P'(x) = (2x + 1)(ax + b) + a(x^2 + x + 1) + 15$ và theo giả thiết.

$P'(1) = 0$, suy ra $2a + b = -5(2)$. Từ (1) và (2) suy ra:

$$a = 1, b = -7. \text{ Vậy } P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2.$$

5. Hãy chứng minh rằng với mọi $a \neq 0$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

6. Với $m < 3$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu. Khi đó hoành độ cực tiểu là $x = 1 + \sqrt{3 - m}$. Tung độ cực tiểu là:

$$y = 2\sqrt{3 - m} + (2 - m). \text{ Từ giả thiết suy ra } m = 2.$$

b) *Tiếp cận.*

2. $a = 1$; $b = 2$; $c = -2$; $p = 1$; $q = -1$.

$$3. a) m = 2; b) m = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

II. Những hàm số thường gặp

1. Khảo sát hàm bậc ba.

$$1. a) m < 0 \text{ hoặc } m > \frac{1}{2}.$$

$$2. b) m = 4.$$

$$3. a) m < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, m > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, m \neq 2;$$

$$b) m = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$4. a) a \leq -1, a \geq 2.$$

$$5. a) m \neq 0.$$

$$6. b) \text{ Khi } m < \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \text{ thì nghiệm dương đó là nghiệm duy nhất của}$$

phương trình.

7. Hãy chứng tỏ hàm số luôn có cực đại và cực tiểu, đồng thời giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu.

$$8. a) p < 0, \frac{2p}{3} \sqrt{\frac{p}{3}} < q < -\frac{2p}{3} \sqrt{\frac{p}{3}};$$

b) Không có p, q nào thỏa mãn.

9. Hãy xác định m để hàm số có cực đại, cực tiểu, đồng thời giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu.

10. b) Trong câu a) ta đã biết hàm số $f(x) = 3x - 4x^3$ đồng biến khi $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Suy ra hàm số đồng biến khi $0 < x < \frac{1}{2}$. Do $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha -$

$$4\sin 3\alpha \text{ nên } 3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Để ý rằng } \begin{cases} 0 < \frac{20}{60} < \frac{21}{60} < \frac{1}{2} \\ 0 < \sin 20^\circ < \frac{1}{2} \end{cases}$$

nên điều cần chứng minh tương đương với:

$$f\left(\frac{20}{60}\right) < f(\sin 20^\circ) < f\left(\frac{21}{60}\right),$$

$$\text{hay là } 1 - \frac{4}{27} < \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{21}{60} - 4\left(\frac{21}{60}\right)^3$$

$$\text{hay là } \frac{23}{27} < \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1757}{2000} \text{ hay là } \frac{46}{27} < \sqrt{3} < 1,757.$$

Điều này đúng, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

11. Nhận thấy rằng $y(m) = 0$. Từ đó:

$$y = (x - m)(x^2 - mx + m^2 - 1).$$

Như vậy ta phải có $m > 0$ và $f(x) = x^2 - mx + m^2 - 1$ phải có hai nghiệm dương khác m . Từ đó suy ra:

$$1 < m < \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

$$12. a) y = \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 + 3;$$

c) $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có $\Delta' = b^2 - 3ac < 0$ (theo giả thiết).

Vậy hàm số luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến, do đó đồ thị luôn cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

d) Do $a, b, c > 0$ nên $y' > 0$ khi $x \geq 0$. Vậy khi $x \geq 0$ hàm số luôn đồng biến. Mặt khác $y(0) = d < 0$ và $y \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nên đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất có hoành độ dương.

13. b) $y = -3x + 3$. Giả sử có tiếp tuyến song song với tiếp tuyến này là $y = -3x + b$. Khi đó phải thỏa mãn:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = -3x + b \\ 3x^2 - 6x = -3 \end{cases}$$

Từ đây suy ra $b = 3$, tức là tiếp tuyến đó trùng với tiếp tuyến $y = -3x + 3$.

c) Nếu $y = kx + b$ là tiếp tuyến suy ra $y' = k$ phải có nghiệm hay $3x^2 - 6x = k$ có nghiệm, suy ra $k \geq -3$.

d) Quỹ tích điểm giữa I của đoạn AC là nửa đường thẳng $x = 3/2$ kẻ từ $-\frac{11}{8}$ đến $+\infty$.

2. Khảo sát hàm số dạng $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

2. $-\frac{4}{5} < m < 0$.

5. $a = 4, b = 5$.

6. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\frac{27}{256}p^4 + q$ khi $x = -\frac{3p}{4}$. Để $y \geq 0 \forall x$ thì $-\frac{27}{256}p^4 + q \geq 0$ suy ra $256q \geq 27p^4$.

7. Hàm số $y = x^4 + px + q$ có giá trị nhỏ nhất khi $x = \sqrt[3]{-\frac{p}{4}}$. Muốn thỏa mãn yêu cầu đầu bài thì giá trị nhỏ nhất của hàm số phải không âm. Từ đây suy ra $256q \geq 27p^4$.

8. Giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{8}(a-b)^4$ đạt được khi $x = -\frac{a+b}{2}$.

9. Để có cực đại, cực tiểu, phương trình $y' = 4x^3 + 3mx^2 + 2mx + m = 0$ phải có 3 nghiệm phân biệt, tức là đồ thị hàm số $y = 4x^3 + 3mx^2 + mx + m$ phải cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. Muốn vậy nó phải có cực đại, cực tiểu và giá trị cực đại, cực tiểu trái dấu.

10. a) $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

b) $\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$

3. Khảo sát hàm số dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$

2. a) $y = \frac{x+1}{2(x-1)}$; b) Có 2 điểm nguyên (3; 1) và (-1; 0).

5. $y = \frac{A}{x}$, với $A < 0$;

6. a) Phương trình có nghiệm khi $m \leq -12$ hoặc $m \geq 1$. Từ đó khảo sát $S = \frac{4m}{m-2}$ và $P = \frac{2m-6}{m-2}$ trong các khoảng nói trên.

b) Khử m từ hệ $\begin{cases} S = \frac{4m}{m-2} \\ P = \frac{2m-6}{m-2} \end{cases}$ ta được hệ thức cần tìm.

7. a) $m < -1$; b) $m = 0$.

4. Khảo sát hàm số dạng $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$.

1. b) $m = 1$; $m = -2$. Lúc đó đồ thị hàm số là một đường thẳng (trừ đi một điểm).

2. b) Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} y - x \geq 0 \\ (y - x)^2 = y^2 + 2(x+1)y + 4x \end{cases}$$

hay là $\begin{cases} y \geq x \\ y = \frac{4x^2 - 4x}{4x + 2} \end{cases}$ Từ đó suy ra $-\frac{1}{2} < x \leq 0$ hoặc $x \leq -2$

3. b) Toạ độ điểm cực đại: $(m-1; -m^2 + m - 2)$; Toạ độ điểm cực tiểu: $(m+1; -m^2 + m + 2)$;

c) Các điểm cực đại và cực tiểu.

5. b) $m > 0$ và $m \neq 2$

6. a) $m = 0$; b) $m < \frac{1}{3}$.

7. a) Nếu $m > 0$ thì $y' > 0$ với mọi $x \neq 2$. Nếu $m < 0$ thì y' có hai nghiệm phân biệt, suy ra hàm số không thể luôn nghịch biến.

8. a) Các điểm trên đồ thị cách đều hai trục tọa độ là:

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ và } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

b) Giả sử tồn tại m thỏa mãn điều kiện bài toán, tức là tồn tại x_1, x_2 sao

cho $x_1 + \frac{x_1^2 + x_1 - 1}{x_1 - 1} = x_2 + \frac{x_1^2 + x_2 - 1}{x_2 - 1} = m$. Điều này nghĩa là phương

trình $x + \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = m$ hay $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ (*) phải có 2 nghiệm

phân biệt.

Từ đây suy ra $m < 4 - \sqrt{8}$, $m > 4 + \sqrt{8}$. Gọi $f(x) = 2x^2 - mx + m - 1$. Vì $f(1) = 1 > 0$ nên số 1 (hoành độ của tiệm cận đứng) nằm ngoài khoảng 2 nghiệm x_1, x_2 . Điều này chứng tỏ M_1 và M_2 nằm trên cùng một nhánh của đồ thị.

c) $k > 1$.

9. b) Giá trị cực đại và cực tiểu cùng dấu chỉ khi hàm số có cực đại, cực tiểu và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt khác -1. Điều này xảy ra vì đồ thị luôn tiếp xúc với trục hoành.

c) Trục hoành.

10. c) $y = x^2$.

11. c) Hai điểm A, B đối xứng nhau qua giao điểm hai đường tiệm cận và khi A thay đổi đường thẳng nối AB luôn đi qua điểm đó.

5. Hàm số hạng $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$.

2. $q = 3$; $q = \pm 4\sqrt{2}$.

3. b) $q = 1$, lúc đó hoành độ cực trị là $x = \pm 1$.

4. Đạo hàm y' phải có một nghiệm và y' đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm đó, đồng thời giá trị cực tiểu của hàm số nhỏ hơn -1.

5. $a = -3$, $p = -4$.

§2. 11. Phép tịnh tiến song song với các trục

1. Viết hàm số đã cho dưới dạng $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$. Khi đó

$$y = -1 + \frac{2}{x+3} = -1 + \frac{2}{(x+4)-1} = \left(1 + \frac{2}{(x+4)-1}\right) - 2 = f(x+4) - 2.$$

2. Đặt $f(x) = 2x + \frac{1}{x-1}$. Khi đó $y = 2x - 1 + \frac{1}{x+1} = 2(x+2) +$

$$\frac{1}{(x+2)-1} - 5 = f(x+2) - 5.$$

3. Đặt $f(x) = \frac{1}{x}$. Khi đó $y = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} = 1 - f(x+1).$

4. Đặt $f(x) = x^2 - x + 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$. Khi đó $y = x^2 + x - 2 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} = [(x+1) - \frac{1}{2}]^2 + \frac{7}{4} - 4 = f(x+1) - 4$.

5. Đặt $f(x) = \frac{x^2}{x-2} = x + 2 + \frac{4}{x-2}$. Khi đó $y = \frac{4+x^2}{x} = \frac{4}{x} + x = (x+2) + 2 + \frac{4}{(x+2)-2} - 4 = f(x+2) - 4$.

6. Cần: Giả sử $f(x) = x^3 + x + 1$ và $x^3 + \alpha x + \beta = f(x+a) + b$ với mọi x . Khi đó $x^3 + \alpha x + \beta = (x+a)^3 + (x+a) + 1 + b$ với mọi x hay

$$3ax^3 + (3a^2 + 1 - \alpha)x + a^3 + a + 1 + b - \beta = 0 \text{ với mọi } x.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} 3a = 0 \\ 3a^2 + 1 - \alpha = 0 \\ a^3 + a + 1 + b - \beta = 0. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $a = 0, \alpha = 1, b = \beta - 1$.

Đủ: Khi $\alpha = 1$ thì

$$y = x^3 + x + \beta = (x^3 + x + 1) + \beta - 1 = f(x) + \beta - 1.$$

8. Có thể chọn $\alpha = 1, \beta = 2$.

PHẦN THỨ HAI
ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

Chương I
BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ

§1. Đẳng thức đại số

Để chứng minh các đẳng thức đại số, ta thường sử dụng các hằng đẳng thức quen biết sau đây:

1. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab;$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca).$$

2. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

3. $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b);$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

4. $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$

5. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$

6. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) =$
 $= (a + b)^3 - 3ab(a + b).$

7. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab) =$
 $= (a - b)^3 + 3ab(a - b).$

Một cách tổng quát:

8. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots + b^{2n}).$

$$9. a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}).$$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2.$$

Giải: Biến đổi về phải, ta được

$$\begin{aligned}(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 &= (a^2x^2 + b^2y^2 + 2axby) + \\ &+ (a^2y^2 + b^2x^2 - 2axby) = \\ &= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng

$$(x + y)(x - y)^3 = x(x + 2y)^3 - y(2x + y)^3.$$

Giải: Viết đẳng thức đã cho dưới dạng:

$$x[(x - y)^3 - (x + 2y)^3] + y[(x - y)^3 + (2x + y)^3] = 0. \quad (1)$$

Biến đổi các biểu thức trong ngoặc vuông ở vế trái của (1), ta được:

$$\begin{aligned}(x - y)^3 - (x + 2y)^3 &= x^3 - y^3 - 3xy(x - y) - x^3 - \\ &- 8y^3 - 6xy(x + 2y) = -9x^3 - 9xy(x + y); \\ (x - y)^3 + (2x + y)^3 &= x^3 - y^3 - 3xy(x - y) + 8x^3 + y^3 + 6xy(2x + y) \\ &= 9x^3 + 9xy(x + y).\end{aligned}$$

Suy ra vế trái của (1) bằng

$$\begin{aligned}x[-9x^3 - 9xy(x + y)] + y[9x^3 + 9xy(x + y)] &= \\ = 9xy(x^2 - y^2) - 9xy[(x(x + y) - y(x + y))] &= \\ = 9xy(x^2 - y^2) - 9xy(x^2 - y^2) = 0.\end{aligned}$$

Đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng

$$x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2.$$

Giải: Viết đẳng thức đã cho dưới dạng:

$$2(x^2 + xy + y^2)^2 - x^4 - y^4 = (x + y)^4.$$

Biến đổi về trái, ta được:

$$\begin{aligned}2(x^2 + xy + y^2)^2 - x^4 - y^4 &= \\ = [(x^2 + xy + y^2)^2 - x^4] + [(x^2 + xy + y^2)^2 - y^4] &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (xy + y^2)(2x^2 + xy + y^2) + (x^2 + xy)x(x^2 + xy + 2y^2) = \\
&= (x + y)[y(2x^2 + xy + y^2) + x(x^2 + xy + 2y^2)] = \\
&= (x + y)[x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3] = (x + y)(x + y)^3 = (x + y)^4.
\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng, nếu ít nhất có hai trong ba số a, b, c khác nhau thì:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2} = \frac{a+b+c}{2}$$

Giải: Biến đổi tử số của phân thức ở vế trái, ta được:

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc = \\
&= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c) = \\
&= (a+b+c)^3 - 3(a+b)c(a+b+c) - 3ab(a+b+c) = \\
&= (a+b+c)[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)] = \\
&= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = \\
&= \frac{a+b+c}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2].
\end{aligned}$$

Vậy vế trái của đẳng thức đã cho bằng:

$$\frac{\frac{a+b+c}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2} = \frac{a+b+c}{2}.$$

Đẳng thức được chứng minh.

§2. Đẳng thức có điều kiện

Ví dụ 5. Cho $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Giải: Sử dụng đẳng thức:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a). \quad (1)$$

Vì $a + b + c = 0$, nên suy ra: $a + b = -c$;

$$b + c = -a; c + a = -b.$$

Từ đó theo (1) ta có

$$0 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Suy ra $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 6. Cho các số a, b, c, d liên hệ bởi các hệ thức:

$$a^2 + b^2 = 1; c^2 + d^2 = 1; ac + bd = 0.$$

Chứng minh rằng

$$1) a^2 + c^2 = 1; 2) b^2 + d^2 = 1; 3) ab + cd = 0.$$

Giải: Ta thấy, khi $a = 0$ thì $b^2 = 1$. Do vậy, từ điều kiện $ac + bd = 0$ suy ra $d = 0$. Thế vào 1), 2) và 3) ta thấy nghiệm đúng. Tương tự, nếu $b = 0$ thì các đẳng thức cũng đúng. Xét $a \neq 0, b \neq 1$. Khi đó có thể viết điều kiện: $ac + bd = 0$ dưới dạng $\frac{d}{a} = -\frac{c}{b} = \alpha$, hay $d = \alpha a; c = -\alpha a$.

Thế vào điều kiện $c^2 + d^2 = 1$, ta thu được $\alpha^2(a^2 + b^2) = 1$, hay $\alpha = \pm 1$. Từ đó, ta được $a^2 = d^2; c^2 = b^2$, nên 1) và 2) đúng. Mặt khác, $ab + cd = ab + (-\beta a)(\alpha a) = ab - \alpha^2 ab = ab - ab = 0$, nên suy ra 3) đúng.

Ví dụ 7. Cho $a + b = 1, ab \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^3 - 1} + \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(ab - 2)}{a^2 b^2 + 3}.$$

Giải: Biến đổi vế trái, ta được

$$\begin{aligned} \frac{a}{b^3 - 1} + \frac{b}{a^3 - 1} &= \frac{a}{(b - 1)^3 + 3b(b - 1)} + \\ &+ \frac{b}{(a - 1)^3 + 3a(a - 1)} = \frac{1 - b}{(b - 1)^3 + 3b(b - 1)} + \\ &+ \frac{1 - a}{(a - 1)^3 + 3a(a - 1)} = -\frac{1}{(1 - b)^2 + 3b} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(1-a)^2 + 3a} = \frac{1}{a^2 + 3b} = \frac{1}{b^2 + 3a} = \\ &= -\frac{b^2 + 3a + a^2 + 3b}{(a^2 + 3b)(b^2 + 3a)} = \frac{-(a^2 + b^2 + 3)}{a^2b^2 + 3(a^3 + b^3) + 9ab} \end{aligned}$$

Mà $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 1 - 3ab$, nên mẫu số của phân thức này bằng: $a^2b^2 + 3(1 - 3ab) + 9ab = a^2b^2 + 3$.

Biến đổi tử số, ta được

$$-(a^2 + b^2 + 3) = -[(a + b)^2 - 2ab + 3] = 2(ab - 2).$$

Vậy vế trái của đẳng thức đã cho bằng $\frac{2(ab - 2)}{a^2b^2 + 3}$. Đẳng

thức được chứng minh.

Ví dụ 8. a) Cho $x + y + z = A$. Chứng minh rằng $x^3 + y^3 + z^3 = A^3 - 3A(xy + yz + zx) + 3xyz$.

b) Hãy xác định các giá trị m sao cho đa thức $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$ chia hết cho $x + y + z$.

Giải: a) Sử dụng đẳng thức:

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y)(y + z)(z + x),$$

ta được $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x) = A^3 - 3(A - z)(A - x)(A - y) =$

$$= A^3 - 3[A^3 - A^2(x + y + z) + A(xy + yz + zx) - xyz] =$$

$$= A^3 - 3[A^3 - A^3 + A(xy + yz + zx) - xyz] =$$

$$= A^3 - 3A(xy + yz + zx) + 3xyz.$$

b) Theo câu a) ta được

$$P(x, y, z) = A^3 - 3A(xy + yz + zx) + (m + 3)xyz.$$

Như vậy $P(x, y, z)$ chia hết cho $x + y + z (= A)$, khi và chỉ khi $(m + 3)xyz$ chia hết cho $x + y + z$ với mọi x, y, z . Lấy $y = z = 1$, ta được đa thức $(m + 3)x$ chia hết cho $x + 2$. Suy ra $m = -3$.

Với $m = -3$, thì

$$P(x, y, z) = (x + y + z)[(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx)].$$

Ví dụ 9. Chứng minh rằng nếu có

$$a^2 + b^2 + c^2 = |ab + bc + ca|, \quad (1)$$

thì $a = b = c$.

Giải. Bình phương hai vế của (1) ta được

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (ab + bc + ca)^2.$$

hay

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) = 0.$$

1. Nếu $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = 0$, thì

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0,$$

hay

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0.$$

Suy ra

$$\begin{cases} a - b = 0, \\ b - c = 0, \\ c - a = 0, \end{cases} \quad \text{hay } a = b = c.$$

2) Nếu $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 0$, thì

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0,$$

hay

$$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 = 0.$$

Do vậy

$$a + b = b + c = c + a = 0.$$

Suy ra $a = b = c = 0$.

Vậy, cả hai trường hợp ta đều có $a = b = c$.

§3. Phân tích biểu thức

a) Phân tích ra thừa số:

Ví dụ 10. Phân tích biểu thức sau đây thành tích các thừa số bậc nhất:

$$a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + c^2b + cb^2 + 2abc.$$

Giải: Nhóm các số hạng ta được:

$$\begin{aligned}
 & (a^2b + a^2c) + (ab^2 + ac^2 + 2abc) + (c^2b + cb^2) = \\
 & = a^2(b + c) + a(b^2 + c^2 + 2bc) + bc(b + c) = \\
 & = a^2(b + c) + a(b + c)^2 + bc(b + c) = \\
 & = (b + c)(a^2 + ab + ac + cb) = \\
 & = (b + c)[(a^2 + ab) + (ac + cb)] = \\
 & = (b + c)[a(a + b) + c(a + b)] = (b + c)(a + b)(a + c).
 \end{aligned}$$

Ví dụ 11. Cho x, y, z liên hệ bởi các hệ thức

$$x^2 - y = a; y^2 - z = b; z^2 - x = c.$$

Hãy tính theo a, b, c các giá trị của biểu thức:

$$P = x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + xyz(xyz - 1).$$

Giải: Biến đổi biểu thức P :

$$\begin{aligned}
 P &= x^3(x - y^2) + y^3x - y^3z^2 + z^3y - z^3x^2 + x^2y^2z^2 - xyz = \\
 &= x^3(z - y^2) + (x^2y^2z^2 - x^2z^3) + (xy^3 - xyz) - y^3z^2 + yz^3 = \\
 &= x^3(z - y^2) + x^2z^2(y^2 - z) + xy(y^2 - z) - yz^2(y^2 - z) = \\
 &= (y^2 - z)(-x^3 + x^2z^2 + xy - yz^2) = \\
 &= (y^2 - z)[x^2(z^2 - x) + y(x - z^2)] = \\
 &= (y^2 - z)(z^2 - x)(x^2 - y) = abc.
 \end{aligned}$$

b) Đơn giản biểu thức

Ví dụ 12. Đơn giản biểu thức:

$$Q = \frac{(a-x)^2}{a(b-a)(c-a)} + \frac{(b-x)^2}{b(a-b)(c-b)} + \frac{(c-x)^2}{c(a-c)(b-c)}.$$

Giải: Mẫu số chung của các phân thức là:

$$abc(a-b)(b-c)(c-a).$$

Ta có:

$$Q = \frac{bc(b-c)(a-x)^2 + ca(c-a)(b-x)^2 + ab(a-b)(c-x)^2}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Phân tích tử số theo đa thức của x , ta được

$$\begin{aligned} & x^2[bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)] - 2x[abc(b-c + c - a + a - b)] + [a^2b^2c - a^2bc^2 + b^2c^2a - b^2ca^2 + c^2a^2b - ab^2c^2] = \\ & = x^2[-(a-b)(b-c)(c-a)]. \end{aligned}$$

Vậy

$$Q = \frac{x^2}{abc}.$$

Ví dụ 13. Đơn giản biểu thức

$$Q(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

khí a, b, c là các số khác nhau từng đôi.

Giải: Nhận xét rằng biểu thức $Q(x)$ là một đa thức bậc không lớn hơn hai theo biến x . Ta có:

$$Q(a) = Q(b) = Q(c) = 1.$$

Điều đó chứng tỏ rằng phương trình $Q(x) = 1$ có ít nhất ba nghiệm khác nhau. Do vậy $Q(x)$ không thể là đa thức bậc hai hoặc bậc nhất, (vì nếu như vậy thì số nghiệm của phương trình $Q(x) = 1$ không quá 2), hay $Q(x)$ bằng một hằng số. Vậy $Q(x) = 1$.

Ví dụ 14. Xác định các giá trị a, b sao cho với mọi x ($x \neq 1, x \neq 2$) ta đều có

$$\frac{4x-7}{x^2-3x+2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}. \quad (1)$$

Giải: Quy đồng mẫu số, ta được:

$$\frac{4x-7}{x^2-3x+2} = \frac{a(x-2) + b(x-1)}{(x-1)(x-2)},$$

hay

$$4x-7 = a(x-2) + b(x-1), \text{ với mọi } x.$$

Khi $x = 2$ thì $1 = b$.

Khi $x = 1$ thì $-3 = -a$, hay $a = 3$.

Ngược lại: khi $a = 3$, $b = 1$ thì (1) luôn luôn đúng.

§4. Tính giá trị của biểu thức

Ví dụ 15. Cho a, b, c là ba số khác nhau. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau là một hằng số (không phụ thuộc vào a, b, c):

$$S = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}.$$

Giải: Quy đồng mẫu số, ta được

$$\begin{aligned} S &= \frac{-a(b-c) - b(c-a) - c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\ &= \frac{-ab + ac - bc + ba - ca + cb}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0. \end{aligned}$$

Vậy $S = 0$.

Ví dụ 16. Cho a, b, c là ba số khác nhau, liên hệ bởi hệ thức $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc a, b, c :

$$T = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$$

Giải: Quy đồng mẫu số, ta được.

$$\begin{aligned} T &= \frac{-a^3(b-c) - b^3(c-a) - c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\ &= \frac{-a^3b + a^3c - b^3c + b^3a - c^3a + c^3b}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\ &= \frac{-(a^3b - b^3a) + (a^3c - b^3c) - (c^3a - c^3b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ab(b+a)(b-a) + c(a-b)(a^2 + ab + b^2) - c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\
&= \frac{(a-b)[-ab^2 - a^2b + ca^2 + cab + cb^2 - c^3]}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\
&= \frac{(a-b)[(-ab^2 + cab) + (-a^2b + ca^2) + (cb^2 - c^3)]}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\
&= \frac{(a-b)[ab(c-b) + a^2(c-b) + c(b-c)(b+c)]}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\
&= \frac{(a-b)(b-c)[-ab - a^2 + bc + c^2]}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\
&= \frac{(a-b)(b-c)[(-ab + bc) + (-a^2 + c^2)]}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \\
&= \frac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = a + b + c = 1.
\end{aligned}$$

Do vậy: $T = 1$.

Ví dụ 17. Tính giá trị của biểu thức sau ứng với $a = 8,5$:

$$T = \frac{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}{\sqrt{a+\sqrt{2a-1}} + \sqrt{a-\sqrt{2a-1}}}.$$

Chứng minh rằng $T < 1$ với mọi $a \geq 2$.

Giải: Nhận xét rằng $a + 2\sqrt{a-1} = (\sqrt{a-1} + 1)^2$,

$$a - 2\sqrt{a-1} = (\sqrt{a-1} - 1)^2,$$

$$a + \sqrt{2a-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{2a-1} + 1)^2,$$

$$a - \sqrt{2a-1} = \frac{1}{2}(\sqrt{2a-1}-1)^2.$$

Do vậy

$$T = \frac{|\sqrt{a-1}+1| + |\sqrt{a-1}-1|}{\frac{1}{\sqrt{2}}|\sqrt{2a-1}+1| + \frac{1}{\sqrt{2}}|\sqrt{2a-1}-1|}.$$

Vì $a \geq 2$ nên các biểu thức trong dấu trị tuyệt đối đều không âm. Suy ra có thể viết:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sqrt{a-1}+1+\sqrt{a-1}-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2a-1}+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2a-1}-1)} = \\ &= \frac{2\sqrt{a-1}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2a-1}} = \sqrt{\frac{2a-2}{2a-1}}. \end{aligned}$$

khí $a = 8,5$, thì $T = \frac{\sqrt{15}}{4}$

Mặt khác,

$$T = \sqrt{1 - \frac{1}{2a-1}} < \sqrt{1} = 1, \text{ với mọi } a \geq 2.$$

Ví dụ 18. Các số a, b, c liên hệ bởi các hệ thức:

$$a + b + c = 1, \quad (1)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad (2)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 1, \quad (3)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức

$$T = a + b^2 + c^3.$$

Giải: Từ hệ thức (2) suy ra $-1 \leq a, b, a \leq 1$.

Do vậy

$$a^3 \leq a^2,$$

$$b^3 \leq b^2,$$

$$c^3 \leq c^2.$$

Cộng các vế tương ứng, ta được $a^3 + b^3 + c^3 \leq 1$.

Do vậy, từ (3) ta suy ra:

$$\begin{cases} a^3 = a^2, \\ b^3 = b^2, \\ c^3 = c^2; \end{cases}$$

hay a, b, c là các số không âm và chỉ nhận một trong hai giá trị 0 hoặc 1. Như vậy $a = a^2$ và $T = a + b^2 + c^3 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Ví dụ 19. Các số dương x, y, z liên hệ bởi hệ thức:

$xy + yz + zx = 1$. Tính giá trị của biểu thức:

$$T = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Giải: Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= x^2 + xy + yz + zx = x(x+y) + z(y+x) = \\ &= (x+y)(x+z). \end{aligned}$$

Tương tự, cũng có:

$$1 + y^2 = (y+x)(y+z) \text{ và } 1 + z^2 = (z+x)(z+y).$$

Cho nên:

$$\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2} = \frac{(y+x)(y+z)(z+x)(z+y)}{(x+y)(x+z)} = (y+z)^2.$$

Tương tự:

$$\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2} = (z+x)^2; \quad \frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2} = (x+y)^2.$$

Từ đó, suy ra

$$T = x(y + z) + y(x + z) + z(x + y) = 2(xy + yz + zx) = 2.$$

Ví dụ 20. Tính giá trị của biểu thức

$$T = (a + x^{1/2})^{-1/2} + (a - x^{1/2})^{-1/2},$$

trong đó $x = 4(a - 1)$; $a = 4 + 2\sqrt{2}$.

Giải: Ta có

$$\begin{aligned} a + x^{1/2} &= a + \sqrt{4(a - 1)} = (a - 1) + 2\sqrt{a - 1} + 1 = \\ &= (\sqrt{a - 1} + 1)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - x^{1/2} &= a - \sqrt{4(a - 1)} = (a - 1) - 2\sqrt{a - 1} + 1 = \\ &= (\sqrt{a - 1} - 1)^2. \end{aligned}$$

Do vậy

$$\begin{aligned} T &= [(\sqrt{a - 1} + 1)^2]^{-1/2} + [(\sqrt{a - 1} - 1)^2]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{|\sqrt{a - 1} + 1|} + \frac{1}{|\sqrt{a - 1} - 1|}. \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \sqrt{a - 1} &= \sqrt{4 + 2\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1, \end{aligned}$$

thành thử

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{|\sqrt{2} + 1 + 1|} + \frac{1}{|\sqrt{2} + 1 - 1|} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 21. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}, \text{ trong đó}$$

$$x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right); 0 < a < 1.$$

Giải: Biến đổi biểu thức, ta được:

$$\begin{aligned} M &= \frac{2a\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+x)}{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)} = \frac{2a(1+x^2+x\sqrt{1+x^2})}{1+x^2-x^2} = \\ &= 2a(1+x^2+x\sqrt{1+x^2}) = a(2+2x^2+2x\sqrt{1+x^2}) = \\ &= a[(1+x^2+2x\sqrt{1+x^2}+x^2)+1] = \\ &= a[(x+\sqrt{x^2+1})^2+1] \end{aligned} \quad (*)$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} 1+x^2 &= 1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{1-a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right)^2 = \\ &= 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{4a^2 - 4a + 1}{a(1-a)} = \\ &= \frac{4a - 4a^2 + 4a^2 - 4a + 1}{4a(1-a)} = \frac{1}{4a(1-a)}. \end{aligned}$$

Do vậy, vế phải của (*) bằng:

$$\begin{aligned} &= a \left[\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-a}{a}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{1-a}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{a(1-a)}} \right)^2 + 1 \right] = \\ &= a \left[\frac{(1-a-a+1)^2}{4a(1-a)} + 1 \right] = a \left[\frac{(1-a)^2}{a(1-a)} + 1 \right] = \\ &= a \left[\frac{1-a}{a} + 1 \right] = 1. \end{aligned}$$

Vậy $M = 1$.

Ví dụ 22. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}} +$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x - (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}}.$$

với $x = \sqrt[3]{25}$.

Giải: Sử dụng đẳng thức $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, ta được

$$A^3 = \frac{x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2} + \frac{x^3 - 3x - (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2} + 3AB.$$

trong đó

$$\begin{aligned} B &= \sqrt[3]{\frac{(x^3 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4})}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x - (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4}}{2}} = \\ &= \sqrt[3]{\frac{(x^3 - 3x)^2 - (x^2 - 1)^2(x^2 - 4)}{4}} = 1. \end{aligned}$$

Vậy $A^3 = x^3 - 3x + 3A$, hay $A^3 - x^3 + 3(x - A) = 0$,

hay $(A - x)(A^2 + Ax + x^2 - 3) = 0$. Do $x^2 > 3$; $A > 0$ và $x > 0$,

nên suy ra $A = x$. Vậy $A = \sqrt[3]{25}$.

Ví dụ 23. Cho a, b là hai số liên hệ bởi các hệ thức

$$a^2 + b^2 = 7ab; \quad ab \neq 0. \quad (1)$$

Tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{\log_3 |a + b| - 1}{\log_3 |a| + \log_3 |b|}.$$

Giải: Cách 1. Viết lại biểu thức dưới dạng

$$M = \frac{\log_3 \frac{|a + b|}{3}}{\log_3 |ab|},$$

hay

$$M \log_3 |ab| = \log_3 \frac{|a + b|}{3},$$

hay

$$|ab|^M = \frac{|a+b|}{3}. \quad (2)$$

Từ điều kiện (1) suy ra $ab > 0$. Do vậy có thể viết (2) dưới dạng:

$$(ab)^M = \frac{|a+b|}{3}.$$

Bình phương hai vế đẳng thức này, ta được:

$$(ab)^{2M} = \frac{(a+b)^2}{9},$$

hay

$$(ab)^{2M} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{9}.$$

Từ điều kiện (1) suy ra:

$$(ab)^{2M} = \frac{7ab + 2ab}{9},$$

hay

$$(ab)^{2M} = ab.$$

Vậy:

$$2M = 1, \text{ hay } M = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: } M &= \frac{\log_3 |a+b| - 1}{\log_3 |ab|} = \frac{\frac{1}{2} \log_3 (a+b)^2 - 1}{\log_3 (ab)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \log_3 (a^2 + b^2 + 2ab) - 1}{\log_3 (ab)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \log_3 (9ab) - 1}{\log_3 (ab)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 24. x và y là các số liên hệ bởi hệ thức:

$$y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \quad (1)$$

Hãy tìm giá trị biểu thức

$$z = \frac{16^x + 16^{-x}}{16^x - 16^{-x}}$$

theo y .

Giải: Cách 1. Từ hệ thức (1) suy ra:

$$y \cdot 2^x - y \cdot 2^{-x} = 2^x + 2^{-x},$$

hay $(y-1)2^x = (y+1)2^{-x}$ hay $4^x = \frac{y+1}{y-1}$.

Do vậy $x = \log_4 \frac{y+1}{y-1}$.

$$\text{Vậy } z = \frac{16^{\log_4 \frac{y+1}{y-1}} + 16^{-\log_4 \frac{y+1}{y-1}}}{16^{\log_4 \frac{y+1}{y-1}} - 16^{-\log_4 \frac{y+1}{y-1}}} =$$

$$= \frac{4^{\log_4 \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2} + 4^{\log_4 \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{-2}}}{4^{\log_4 \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2} - 4^{\log_4 \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{-2}}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{-2}}{\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2 - \left(\frac{y+1}{y-1}\right)^{-2}}.$$

Cách 2. Sau khi có $4^x = \frac{y+1}{y-1}$; đem bình phương hai vế ta được $16^x = (\frac{y+1}{y-1})^2$. Từ đó cũng suy ra kết quả trên.

Ví dụ 25. a, b, c, d là những số dương khác 1 thoả mãn điều kiện

$$\frac{\log_a d}{\log_c d} = \frac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} \quad (1)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $A = b^2 - ac$ theo d.

Giải: Ta có:

$$\frac{\log_a d}{\log_c d} = \frac{\log_c d}{\log_d a}$$

và

$$\begin{aligned} \frac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} &= \frac{\frac{1}{\log_d a} - \frac{1}{\log_d b}}{\frac{1}{\log_d b} - \frac{1}{\log_d c}} = \\ &= \frac{\log_d \frac{b}{a}}{\log_d \frac{c}{b}} \cdot \frac{\log_d c}{\log_d a}. \end{aligned}$$

Do vậy (1) có dạng:

$$\frac{\log_d c}{\log_d a} = \frac{\log_d \frac{b}{a}}{\log_d \frac{c}{b}} \cdot \frac{\log_d c}{\log_d a},$$

$$\text{hay} \quad \log_d \frac{b}{a} = \log_d \frac{c}{b},$$

$$\text{hay} \quad \frac{b}{a} = \frac{c}{b}. \text{ Vậy } A = b^2 - ac = 0.$$

BÀI TẬP

1. Chứng minh các công thức:

$$a) \sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}};$$

$$b) \sqrt{x - \sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} - \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}};$$

$$c) \sqrt{x + \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x}}} + \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x}}} = \frac{\sqrt{2x + 4}}{\sqrt{x}};$$

$$d) \sqrt[3]{x^3 + 3xy + (3x^2 + y)\sqrt{y}} + \sqrt[3]{x^3 + 3xy - (3x^2 + y)\sqrt{y}} = 2x$$

$$e) \sqrt{\frac{abx + c^2}{bc}} + \sqrt{\frac{4ax}{b}} + \sqrt{\frac{abx + c^2}{bc}} - \sqrt{\frac{4ax}{b}} = \sqrt{\frac{4ax}{b}}.$$

2. Chứng minh các đồng nhất thức:

$$a) \frac{a(x-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x$$

$$b) \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2;$$

$$c) \frac{(b+c)(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c+a)(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a+b)(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = a + b + c - x.$$

3. Chứng minh rằng nếu có:

$$\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a,$$

thì

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}.$$

4. Đặt $m_1 = \frac{a+b}{a-b}$; $m_2 = \frac{c+d}{c-d}$; $m_3 = \frac{ac-bd}{ad+bc}$

Chứng minh rằng:

$$m_1 + m_2 + m_3 = m_1 m_2 m_3$$

5. Chứng minh rằng nếu có

$$\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}; x \neq y; x \neq 0; y \neq 0;$$

$$z \neq 0; xz \neq 1; yz \neq 1 \text{ thì}$$

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

6. Cho

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0.$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

7. Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1.$

Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

8. Cho $x + y + z = 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = (\frac{y-z}{x} +$

$$+ \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z})(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y})$$
 khi nó có nghĩa.

9. Hãy xác định a và b sao cho đa thức

$$P(x) = x^4 + (a+b)x^3 + (a-b)x^2 + (a^2 - 2b - 1)x + a + b + 4$$

chia hết cho đa thức $x^2 - 2x + 1$.

10. Cho $a > 0; a \neq 1$. Đặt $s(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}; c(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$.

Chứng minh rằng các công thức sau:

a) $s(2x) = 2s(x)c(x)$,

b) $c(2x) = 2c^2(x) - 1 = 2s^2(x) + 1 = c^2(x) + s^2(x)$.

c) $s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)$,

d) $c(x+y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$.

11. Chứng minh rằng

$$\log_a N \log_b N + \log_b N \log_c N + \log_c N \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N};$$

($a > 0, b > 0, c > 0, N > 0; a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1, N \neq 1; abc \neq 1$).

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP

Chương I

1. a) Bình phương hai vế

$$x + \sqrt{y} = x + 2\sqrt{\frac{x^2 - (x^2 - y)}{4}}, \text{ hay } x + \sqrt{y} = x + \sqrt{y}.$$

b) Chứng minh tương tự.

c) Nhân hai vế với $\sqrt[4]{x}$, ta được:

$$\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4}} = \sqrt{2x + 4};$$

tiếp theo áp dụng kết quả câu a) ta được điều cần chứng minh.

d) Biến đổi biểu thức trong câu ở vế trái, ta được:

$$\begin{aligned} x^3 + 3xy + (3x^2 + y)\sqrt{y} &= x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3x(\sqrt{y})^2 + (\sqrt{y})^3 = (x + \sqrt{y})^3 \cdot x^3 + \\ 3xy - (3x^2 + y)\sqrt{y} &= x^3 - 3x^2\sqrt{y} + 3x(\sqrt{y})^2 - (\sqrt{y})^3 = (x - \sqrt{y})^3; \text{ từ đó, suy ra} \\ \text{điều cần chứng minh.} \end{aligned}$$

e) Nhân hai vế với $\sqrt{bc}$, ta được

$$\sqrt{abx + c^2} + \sqrt{4abxc^2} + \sqrt{abx + c^2} - \sqrt{abxc^2} = \sqrt{4acx}, \text{ hay}$$

$$|c + \sqrt{abx}| + |c - \sqrt{abx}| = \sqrt{4acx}.$$

2. a) Lần lượt thay $x = a, b, c$ vào vế trái ta được các giá trị tương ứng a, b, c . Từ đó suy ra đồng nhất thức.

b) và c) cũng tiến hành theo cách giải như vậy. Ở đây ta đã sử dụng định lý sau: Nếu đa thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ bằng 0 tại ít nhất ba điểm khác nhau thì $a = b = c = 0$.

3. Bình phương hai vế đẳng thức đã cho:

$$x^2 + y^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2} + \sqrt[3]{x^2 y^4} + 2\sqrt{(x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2})(y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4})}.$$

$$\text{Mà } x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2} = (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^2, \quad y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4} = (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^2.$$

Do vậy vế trái (1) bằng:

$$x^2 + y^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2} + \sqrt[3]{x^2 y^4} + 2\sqrt{x^2 y^2 (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})} = x^2 + y^2 + 3^2 \sqrt{x^4 y^2} + 3\sqrt[3]{x^2 y^4} = (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2})^3.$$

Từ đó suy ra hệ thức cần chứng minh.

5. Sử dụng tính chất của phân số: nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a+c}{b+d}$, nếu các phân số có nghĩa.

6. Lần lượt nhân hai vế của đẳng thức đã cho với $\frac{1}{b-c}$; $\frac{1}{c-a}$ và $\frac{1}{a-b}$, sau đó cộng lại.

7. Bình phương hai vế hệ thức: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$,

$$\text{ta được } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} + \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c} + \frac{z}{c} \cdot \frac{x}{a}\right) = 1$$

$$\text{và } \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} + \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c} + \frac{z}{c} \cdot \frac{x}{a} = \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c} \left(\frac{c}{x} + \frac{b}{y} + \frac{a}{z}\right) = 0.$$

9. Đa thức đã cho và đạo hàm của nó nhận 1 làm nghiệm. Vì vậy, khi đặt $x = 1$, ta được $P(1) = 0$, $P'(1) = 0$.

10. Sử dụng công thức đảo cơ số:

$$\log_a N \cdot \log_b N = \frac{1}{\log_N a \cdot \log_N b}.$$

BẤT ĐẲNG THỨC

§1. Định nghĩa và các tính chất

A. Khái niệm về tính chất cơ bản.

Cho hai số a và b , ta nói rằng a lớn hơn b , (ký hiệu $a > b$), nếu hiệu $a - b$ là một số dương; a nhỏ hơn b , (ký hiệu $a < b$), nếu hiệu $a - b$ là một số âm. Ngược lại, nếu hiệu $a - b > 0$, thì ta nói rằng $a > b$ và nếu $a - b < 0$, thì $a < b$.

Như vậy:

$a > b$ tương đương với $a - b > 0$,

$a < b$ tương đương với $a - b < 0$.

Sau đây là một số tính chất cơ bản thường được dùng trong quá trình chứng minh bất đẳng thức.

- 1) Nếu $a > b$ thì $b < a$ và ngược lại.
- 2) Nếu $a > b$ và $b > c$ thì $a > c$.
- 3) Nếu $a > b$ thì với mọi số c ta đều có $a + c > b + c$.
- 4) Nếu $a > b$ và $c > d$ thì $a + c > b + d$.
- 5) Nếu $a > b$ và $c < d$ thì $a - c > b - d$.
- 6) Nếu $a > b$ thì $-a < -b$, và ngược lại.
- 7) Nếu $a > b$ và $c > 0$ thì $ac > bc$. Nếu $a > b$ và $c < 0$ thì $ac < bc$.
- 8) Nếu $a > b > 0$ và $\alpha > 0$ thì $a\alpha > b\alpha$; nếu $a > b > 0$, $\alpha < 0$ thì $a\alpha < b\alpha$.
- 9) Nếu n là một số tự nhiên thì $a^{2n} > b^{2n}$ tương đương với $|a| > |b|$.
- 10) Nếu $a > 1$ thì $a^{x_1} > a^{x_2}$ khi và chỉ khi $x_1 > x_2$.
- 11) Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{x_1} > a^{x_2}$ khi và chỉ khi $x_1 < x_2$.

12) Nếu $a > b > 1$ thì $a^x > b^x$ khi và chỉ khi $x > 0$.

13) Nếu $0 < a < b < 1$ thì $a^x > b^x$ khi và chỉ khi $x < 0$.

B. Một số các tính chất khác.

Khi hai biểu thức $A(x)$ và $B(x)$ phụ thuộc vào biến x , được xác định trên cùng một khoảng xác định D nào đó thì ta viết $A(x) > B(x)$ (hoặc $A(x) < B(x)$) nếu hiệu $A(x) - B(x) > 0$ (hoặc $A(x) - B(x) < 0$), ứng với mọi trị số x trong khoảng xác định D ở trên. Ngoài ra, nếu tồn tại ít nhất một giá trị x_0 thuộc D sao cho $A(x_0) = B(x_0)$ thì ta viết $A(x) \geq B(x)$.

Tương tự, đối với các biểu thức phụ thuộc vào nhiều biến số, ta cũng có định nghĩa như vậy.

Chú ý: Ngay đối với cặp số a, b người ta cũng dùng các ký hiệu $a \geq b$ hoặc $a \leq b$, theo nghĩa sau đây:

$a \geq b$ khi và chỉ khi, hoặc $a > b$, hoặc $a = b$;

$a \leq b$ khi và chỉ khi, hoặc $a < b$, hoặc $a = b$.

Do vậy ta có thể coi $2 > 1$ là $2 \geq 1$; $1 = 1$ là $1 \geq 1$ hoặc $1 \leq 1$, tùy theo từng trường hợp cụ thể.

14) Tính chất của giá trị tuyệt đối. Theo định nghĩa

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{nếu } a \geq 0, \\ -a, & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

Do vậy, có thể viết: $-|a| \leq a \leq |a|$ và

$$|a| = \sqrt{a^2} \geq 0 \text{ với mọi } a.$$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Giải: Theo tính chất của giá trị tuyệt đối thì ta có:

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

do vậy,

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Từ đó suy ra $|a + b| \leq |a| + |b|$. Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng

$$|a - b| \geq ||a| - |b||.$$

Giải: Theo ví dụ 1 thì

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|,$$

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|.$$

Suy ra:

$$|a| - |b| \leq |a - b|,$$

$$|b| - |a| \leq |a - b|;$$

$$\text{hay } -|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Do vậy:

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Nhận xét: Tổng quát, ta có:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ không có hai số nào trái dấu.

15) Tính chất của tam thức bậc hai. Giả sử x_1, x_2 là hai số cho trước, $x_1 < x_2$, khi đó bất đẳng thức $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ tương đương với bất đẳng thức $x_1 < x < x_2$. Còn bất đẳng thức $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ sẽ tương đương với hai bất đẳng thức.

$$x < x_1 \text{ hoặc } x > x_2.$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng với mọi x , ta đều có:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Giải: Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai, thì bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\right) \leq 0,$$

hay

$$\frac{2x-1-x^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{2x+1-x^2}{2(1+x^2)} \leq 0,$$

hay

$$-(1-x)^2(1+x)^2 \leq 0.$$

Điều này luôn luôn đúng, vậy bất đẳng thức được chứng minh;

16) *Tính chất của hàm lồi, hàm lõm.* Nếu hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng (α, β) và có tính chất:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad (1)$$

với mọi x_1, x_2 thuộc khoảng (α, β) , và dấu đẳng thức xảy ra chỉ khi $x_1 = x_2$, thì $f(x)$ được gọi là hàm lồi trên khoảng (α, β) . Nếu (1) được thay bằng dấu bất đẳng thức ngược lại thì $f(x)$ sẽ gọi là hàm lõm.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm lồi trên khoảng (α, β) thì với mọi x_1, x_2, x_3, x_4 thuộc khoảng (α, β) ta đều có:

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}$$

Giải: Theo định nghĩa ở trên, ta có:

$$\begin{cases} f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \\ f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \leq \frac{f(x_3)+f(x_4)}{2} \end{cases}$$

Mặt khác, $y_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$; $y_2 = \frac{x_3+x_4}{2}$ là hai điểm thuộc (α, β) , nên:

$$f\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \leq \frac{f(y_1) + f(y_2)}{2},$$

hay

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) &\leq \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)}{2} \leq \\ &\leq \frac{\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2}}{2} = \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4}. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

17) *Liên hệ giữa tính đồng biến, nghịch biến của hàm số với đạo hàm của nó* (xem sách giáo khoa, đại số, lớp 12).

Ví dụ 5. Chứng minh rằng nếu hàm số $f(x)$ có tính chất $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$, $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc đoạn $[\alpha, \beta]$ thì $f(x) \geq 0$ trên đoạn $[\alpha, \beta]$.

Giải: Vì $f''(x) > 0$ trên đoạn $[\alpha, \beta]$, nên $f'(x)$ là hàm số đồng biến trên đoạn đó. Do vậy: $f'(x) > f'(\alpha)$ khi $\alpha < x \leq \beta$. Vậy $f'(x) > 0$. Suy ra $f(x)$ là một hàm đồng biến trên đoạn $[\alpha, \beta]$. Do vậy $f(x) \geq f(\alpha) = 0$ khi $\alpha \leq x \leq \beta$. Bất đẳng thức được chứng minh.

18) *Bất đẳng thức Côsi và bất đẳng thức Bunhiacôski.*

Trong chương trình toán phổ thông trung học, rất nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức là những hệ quả trực tiếp hoặc gián tiếp của hai dạng bất đẳng thức quan trọng sau đây:

a) *Bất đẳng thức Côsi:* cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là những số không âm thì $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2$;

$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1 = a_2 = a_3;$$

tổng quát:

$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

b) Bất đẳng thức Bunhiacôpski: cho $2n$ số tùy ý $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$, khi đó ta luôn luôn có

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2);$$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2);$$

tổng quát:

$$\begin{aligned} (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 &\leq \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2). \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho

$$b_i = k a_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

§2. Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Để chứng tỏ rằng một bất đẳng thức nào đó là đúng, ta cần lập luận chặt chẽ, dựa trên các tính chất cơ bản của bất đẳng thức. Do không nắm vững các tính chất cơ bản ấy, nhiều học sinh đã phạm vào những sai lầm phổ biến sau đây:

- 1) Trừ các vế tương ứng của hai bất đẳng thức cùng chiều.
- 2) Bình phương hai vế của một bất đẳng thức, mà không kiểm nghiệm xem hai vế của bất đẳng thức đó dương hay không.

- 3) Sử dụng các phép biến đổi không tương đương khác.

Phương pháp chứng minh bất đẳng thức rất đa dạng, chủ yếu dựa vào đặc thù riêng của từng bất đẳng thức. Cần chú ý

rằng có thể áp dụng nhiều cách khác nhau để chứng minh bất đẳng thức, tuy nhiên, có nhiều bài, phải phối hợp với nhiều phương pháp một cách hợp lý. Sau đây là một số phương pháp đơn giản thường được sử dụng để chứng minh các bất đẳng thức sơ cấp.

1. Dùng định nghĩa. Để chứng minh một bất đẳng thức $A > B$ nào đó là đúng, ta cần chỉ ra rằng $A - B > 0$, hoặc ngược lại, khi cần chứng minh $A - B > 0$ ta có thể đưa về bất đẳng thức $A > B$ để chứng minh.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng với mọi x, y ta đều có

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq |xy| \geq xy.$$

$$\begin{aligned} \text{Giải. Hiệu } S &= \frac{x^2 + y^2}{2} - |xy| = \frac{x^2 + y^2 - 2|xy|}{2} = \\ &= \left(\frac{|x| - |y|}{2} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đầu là đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|x| = |y|$. Bất đẳng thức sau là hiển nhiên và dấu bằng ở đây xảy ra khi và chỉ khi $xy \geq 0$.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng với mọi xy ta đều có

$$x^4 + y^4 \geq xy^3 + x^3y.$$

$$\begin{aligned} \text{Giải: Hiệu } x^4 + y^4 - (xy^3 + x^3y) &= (x^4 - xy^3) + (y^4 - x^3y) = \\ &= x(x^3 - y^3) - y(x^3 - y^3) = (x - y)(x^3 - y^3) = \\ &= (x - y)^2 (x^2 + xy + y^2) = (x - y)^2 \left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho là đúng. Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng với hai số a, b tùy ý ta luôn có

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

$$\text{Giải: Hiệu } a^2 + b^2 + 1 - (ab + a + b) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b) = \\
&= \frac{1}{2} [(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1)] = \\
&= \frac{1}{2} [(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2] \geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Tương tự, bằng cách đưa hiệu hai vế của bất đẳng thức về dạng tổng các bình phương của các biểu thức, bạn đọc có thể tự chứng minh các ví dụ sau:

Ví dụ 9. Chứng minh rằng, với mọi a, b, c, d, e ta đều có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

Ví dụ 10. Chứng minh rằng, với mọi a, b, c ta đều có:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2.$$

2. Dùng các phép biến đổi tương đương. Hai bất đẳng thức được gọi là tương đương nếu bất đẳng thức này đúng thì bất đẳng thức kia cũng đúng và ngược lại.

Phép biến đổi được gọi là tương đương, nếu nó biến đổi một bất đẳng thức thành bất đẳng thức khác, tương đương với nó.

Ví dụ 11. Các số a, b, c, x, y liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a^2 + b^2 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Chứng minh rằng } x^2 + y^2 \geq \frac{c^2}{a^2 + b^2}. \quad (2)$$

Giải: Từ hệ thức (1), ta suy ra (2) tương đương với

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(ax + by)^2}{a^2 + b^2}$$

hay

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2. \quad (3)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski, (3) đúng. Do vậy (2) đúng. Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 12. Cho các số $a > 0, b > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt[4]{ab}.$$

Giải: Do $a > 0, b > 0$, nên ta có thể chia hết hai vế của bất đẳng thức cho $\sqrt[4]{ab}$, và được

$$\frac{2\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq 1,$$

hay $2\sqrt[4]{ab} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. (do $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$),

hay $0 \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} - 2\sqrt[4]{ab}$. (theo định nghĩa),

hay $0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})^2$.

Bất đẳng thức này đúng, vậy bất đẳng thức đã cho là đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng với $ab > 0$,

$$(a^5 + b^5)(a + b) \geq (a^4 + b^4)(a^2 + b^2). \quad (1)$$

$$\text{Giải: } (1) \Leftrightarrow a^6 + a^5b + ab^5 + b^6 \geq a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6$$

$$\Leftrightarrow a^5b - a^4b^2 + ab^5 - a^2b^4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4b(a - b) - ab^4(a - b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ab(a - b)(a^3 - b^3) \geq 0 \Leftrightarrow ab(a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0.$$

Ví dụ 14. Cho $z \geq y \geq x > 0$. Chứng minh rằng

$$y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{y}(x + z) \leq (x + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right).$$

Giải: Viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$\frac{y}{xz}(x+z) + \frac{1}{y}(x+z) \leq (x+z)(x+z) \cdot \frac{1}{zx}.$$

Do $x + z > 0$, $y > 0$ và $xz > 0$, nên có thể nhân hai vế với $\frac{xyz}{x+z}$ ta được bất đẳng thức mới tương đương:

$$y^2 + xz \leq xy + yz,$$

hay $y^2 - xy + xz - yz \leq 0,$

hay $y(y-x) + z(x-y) \leq 0$

hay $-(y-x)(z-y) \leq 0.$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng, (vì $y-x \geq 0$, $z-y \geq 0$).

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Vậy bất đẳng thức đã cho cũng đúng.

Ví dụ 15. Cho $a \geq 2$, $b \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$ab \geq a + b.$$

Giải: Viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng:

$$ab - a - b + 1 \geq 1,$$

hay

$$a(b-1) - (b-1) \geq 1,$$

hay

$$(a-1)(b-1) \geq 1. \quad (1)$$

Do $a \geq 2$, $b \geq 2$, nên $a-1 \geq 1$, $b-1 \geq 1$. Vậy (1) đúng. Suy ra bất đẳng thức đã cho đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$.

3. Phương pháp phản chứng.

Ví dụ 16. Chứng minh rằng nếu $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$ thì $a^2 + b^2 + c^2 \neq |ab + bc + ca|$. (1)

Giải: Giả sử $a^2 + b^2 + c^2 = |ab + bc + ca|$. Khi đó, theo ví dụ 9, chương I, suy ra $a = b = c$. Điều này trái với giả thiết. Vậy bất đẳng thức (1) đúng.

Ví dụ 17. Cho các số a_1, a_2, b_1, b_2 , liên hệ bởi hệ thức $a_1 + a_2 = 2b_1b_2$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau là đúng:

$$b_1^2 \geq a_1; \quad b_2^2 \geq a_2.$$

Giải. Giả sử cả hai bất đẳng thức đều không đúng, tức là từ:

$$b_1^2 < a_1; \quad b_2^2 < a_2,$$

hay
$$b_1^2 - a_1 < 0; \quad b_2^2 - a_2 < 0.$$

Suy ra

$$(b_1^2 - a_1) + (b_2^2 - a_2) < 0,$$

hay

$$b_1^2 + b_2^2 - (a_1 + a_2) < 0. \quad (1)$$

Theo giả thiết thì $a_1 + a_2 = 2b_1b_2$. Do vậy (1) tương đương với

$$b_1^2 + b_2^2 - 2b_1b_2 < 0.$$

hay $(b_1 - b_2)^2 < 0$. Điều này không thể xảy ra. Do vậy giả thiết là sai, suy ra điều phải chứng minh là đúng.

Ví dụ 18. Ba số a, b, c thỏa mãn các điều kiện:

$$a + b + c > 0, \quad (1)$$

$$ab + bc + ca > 0, \quad (2)$$

$$abc > 0 \quad (3)$$

Chứng minh rằng $a > 0, b > 0, c > 0$.

Giải: Vì vai trò a, b, c là như nhau nên ta chỉ cần chứng minh $a > 0$ là đủ. Giả sử ngược lại $a \leq 0$. Trước hết $a = 0$ không thể xảy ra do giả thiết (3). Nếu $a < 0$, thì do (3), ta có $bc < 0$. Mặt khác theo (2), ta có $a(b + c) > -bc > 0$; suy ra $b + c < 0$. Vậy $a + b + c < 0$. Điều đó trái với (1).

Ví dụ 19. Cho $0 < a < 1; 0 < b < 1; 0 < c < 1$.

Chứng minh rằng ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau đây là sai:

$$a(1 - b) > \frac{1}{4}; \quad b(1 - c) > \frac{1}{4}; \quad c(1 - a) > \frac{1}{4}.$$

Giải: Giả sử cả ba bất đẳng thức đều đúng. Khi đó, nhân các vế tương ứng, ta thu được:

$$[a(1-a)][b(1-b)][c(1-c)] > \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \quad (1)$$

Mặt khác, hiển nhiên $a^2 - a + \frac{1}{4} = (a - \frac{1}{2})^2 \geq 0$,

nên $0 \leq a(1-a) \leq \frac{1}{4}$. Tương tự, ta cũng có:

$$0 \leq b(1-b) \leq \frac{1}{4}, \quad 0 \leq c(1-c) \leq \frac{1}{4}.$$

Nhân vế với vế các bất đẳng thức này, ta được:

$$[a(1-a)][b(1-b)][c(1-c)] \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}.$$

Kết hợp với (1), ta được: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} > \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$.

Điều này không thể xảy ra.

Vậy phải có ít nhất một bất đẳng thức là sai.

Ví dụ 20. So sánh 2 số $\frac{\sqrt{5}+1}{5\sqrt{10}-2\sqrt{5}}$ và $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Giải: Giả sử

$$\frac{\sqrt{5}+1}{5\sqrt{10}-2\sqrt{5}} > \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}+1}{5\sqrt{10}-2\sqrt{5}} \right)^2 > \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{6+2\sqrt{5}}{25(10-2\sqrt{5})} > \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow 72 + 24\sqrt{5} > 250 - 50\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 74\sqrt{5} > 178 \Leftrightarrow 37\sqrt{5} > 89$$

$$\Leftrightarrow 6845 > 7921 - \text{không đúng.}$$

Vậy (1) – sai, suy ra

$$\frac{\sqrt{5}+1}{5\sqrt{10-2\sqrt{5}}} < \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ví dụ 21. Nếu $0 < x < \frac{\pi}{2}$, hãy so sánh 2 số

$$\cot g \frac{x}{2} \text{ và } 1 + \cot g x.$$

Giải: Điều kiện

$$\frac{x}{2} \neq k\pi.$$

$$x \neq k\pi.$$

Do $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên các số cần so sánh có nghĩa

$$\text{Giả sử } \cot g \frac{x}{2} < 1 + \cot g x = 1 + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \quad (1)$$

Do $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > 0$ nên

$$(1) \Leftrightarrow 2 < 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + (1 - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1)^2 < 0 \text{ vô lý.}$$

Vậy $\cot g \frac{x}{2} > 1 + \cot g x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 22. Hãy so sánh 2 số $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_{4,5} \pi}$ và 2.

Giải: Giả sử $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_{4.5} \pi} \geq 2$. (1)

Từ công thức đổi cơ số: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

(1) tương đương với:

$$\log_{\pi} 2 + \log_{\pi} 4.5 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\pi} (2.4.5) \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\pi} 9 \geq 2 \Leftrightarrow 2\log_{\pi} 3 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\pi} 3 \geq 1 \Leftrightarrow 3 \geq \pi. \text{ Điều này vô lý.}$$

Vậy (1) sai, hay $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_{4.5} \pi} < 2$.

Nhận xét. Trong 3 phương pháp chứng minh bất đẳng thức nói trên, thực chất đều được dựa trên phép biến đổi đồng nhất. Do đó, một bất đẳng thức, nếu chúng mình được bằng một phương pháp sẽ dễ dàng chuyển qua phép chứng minh bằng 2 phương pháp còn lại.

Ví dụ 23. Chứng minh bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \text{ với mọi } a, b, c. \quad (1)$$

Giải: Cách 1. Dùng định nghĩa

Xét $P = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca =$

$$= \frac{1}{2} [(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) +$$

$$+ (c^2 - 2ac + a^2)] = \frac{1}{2} [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \geq 0$$

$P \geq 0$ suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Cách 2. Dùng biến đổi tương đương:

$$(1) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2b - 2bc - 2ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2bc + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Cách 3. Phản chứng, giả sử

$$a^2 + b^2 + c^2 < ab + bc + ca \quad (1')$$

biến đổi đồng nhất như trên ta có

$$(1') \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 < 0 - \text{mâu thuẫn!}$$

Ví dụ 24. Chứng minh bất đẳng thức

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2. \quad (1)$$

Giải: Cách 1. Phương pháp dùng định nghĩa.

$$\begin{aligned} \text{Xét } P &= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 = \\ &= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - 2abxy - b^2y^2 = \\ &= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay - bx)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$P \geq 0$ suy ra (1) được chứng minh.

Cách 2. Biến đổi tương đương.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 \geq a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 \\ &\Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy \\ &\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0. \text{ Vậy (1) được chứng minh} \end{aligned}$$

Cách 3. Nếu phát biểu phản chứng (1) ta sẽ dẫn đến điều mâu thuẫn là: $P = (ay - bx)^2 < 0$.

4. Phương pháp chứng minh bất đẳng thức sử dụng tính chất bắc cầu. Nội dung của phương pháp: để chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$ ta chứng minh cặp bất đẳng thức

$$\begin{cases} A \geq C \\ C \geq B \end{cases} \Rightarrow A \geq B.$$

Ví dụ 25. Chứng minh rằng, với $\forall a, b$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{3^{a+2}}{3^a + 1} \leq 1 - b + \frac{1}{2}b^2. \quad (1)$$

Giải: Xét vế phải của (1), ta có

$$1 - b + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}b^2 - b + 1 = \frac{1}{2}(b^2 - 2b + 1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \quad (2), \text{ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } b = 1.$$

Ta sẽ chứng minh vế trái của (1): $\frac{3^{a/2}}{3^a + 1} \leq \frac{1}{2}$.

Thực vậy: $\frac{3^{a/2}}{3^a + 1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{a/2} \leq 3^a + 1$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 3^a - 2 \cdot 3^{a/2} + 1 = (3^{1/2} - 1)^2 \quad (3). \text{ Dấu bằng khi } a = 0.$$

Từ (2), (3) suy ra (1) đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 0, b = 1$.

Ví dụ 26. Không dùng bảng, so sánh 2 số $\log_7 8$ và $\log_8 9$.

Giải: Xét $A = \log_8 9 + \log_8 7 = \log_8 (9 \cdot 7) = \log_8 63 < 2 = \log_8 64$
và số $B = \log_7 8 + \log_8 7 \geq 2 \cdot \sqrt{\log_7 8 \cdot \log_8 7} = 2$.

Vậy $A < 2 \leq B$ nên $\log_7 8 > \log_8 9$.

Ví dụ 27. Không dùng bảng, hãy so sánh $\text{tg} 208^\circ$ và $\sin 492^\circ$.

Giải: Xét $A = \text{tg} 208^\circ = \text{tg}(180^\circ + 28^\circ) = \text{tg} 28^\circ < \text{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
và số $B = \sin 492^\circ = \sin(360^\circ + 132^\circ) = \sin 132^\circ = \sin 48^\circ > \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Vậy } \text{tg} 208^\circ < \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 492^\circ.$$

Ví dụ 28. Chứng minh với mọi $a, b, c, d > 0$ ta có

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{a+b+d} < 2.$$

Giải. Do các số $a, b, c, d > 0$ ta có các bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+c},$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{a+b+c+d} &< \frac{b}{b+c+d} < \frac{b}{b+d}, \\ \frac{c}{a+b+c+d} &< \frac{c}{c+d+a} < \frac{c}{c+a}, \\ \frac{d}{a+b+c+d} &< \frac{d}{c+b+d} < \frac{d}{b+d}. \end{aligned}$$

Cộng các vế của bất đẳng thức ta được điều phải chứng minh.

5. Sử dụng các bất đẳng thức quan trọng trong gian đã biết. Sử dụng tính chất "bắc cầu" của các bất đẳng thức và một số bất đẳng thức quan trọng, quen biết, ta có thể rút ngắn các phép chứng minh. Thông thường trong chương trình phổ thông trung học, các bất đẳng thức Côsi và bất đẳng thức Bunhiôpski là những bất đẳng thức quan trọng, được sử dụng rộng rãi nhất. Trong mục này ta sẽ xét một số ứng dụng trực tiếp của các bất đẳng thức này.

Ví dụ 29. a và b là hai số dương, chứng minh rằng

$$a + b \geq \frac{4ab}{1 + ab}.$$

Giải: Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

$$1 + ab \geq 2\sqrt{ab}.$$

Nhân các vế tương ứng của các bất đẳng thức này, ta được:

$$(a + b) \cdot (1 + ab) \geq 4ab.$$

Do $1 + ab > 0$, nên có thể chia cả hai vế của bất đẳng thức này cho $1 + ab$:

$$a + b \geq \frac{4ab}{1 + ab}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Ví dụ 30. Cho $a \geq 1, b \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab.$$

Giải: Theo bất đẳng thức Côsi thì:

$$\sqrt{b-1} = \sqrt{1(b-1)} \leq \frac{1+(b-1)}{a} = \frac{b}{a}.$$

Tương tự, $\sqrt{a-1} \leq \frac{a}{b}$.

Do vậy:

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq a \cdot \frac{b}{a} + b \cdot \frac{a}{b} = ab.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2$.

Ví dụ 31. Cho a, b, c là ba số không âm thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}.$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{2}{3}(a+b)} \leq \frac{\frac{2}{3} + a + b}{2},$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{b+c} = \sqrt{\frac{2}{3}(b+c)} \leq \frac{\frac{2}{3} + b + c}{2},$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{c+a} = \sqrt{\frac{2}{3}(c+a)} \leq \frac{\frac{2}{3} + c + a}{2}.$$

Cộng các vế tương ứng của các bất đẳng thức này ta thu được:

$$\sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} [2 + 2(a + b + c)] = 2.$$

$$\text{hay } \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 32. Cho a, b, c là ba số dương và $a + b + c = 1$.

Chứng minh rằng

$$(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})(1 + \frac{1}{c}) \geq 64.$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho bốn số không âm ta được

$$1 + a = a + b + c + a \geq 4\sqrt[4]{a^2bc};$$

$$1 + b = a + b + c + b \geq 4\sqrt[4]{ab^2c};$$

$$1 + c = a + b + c + c \geq 4\sqrt[4]{abc^2};$$

Nhân các vế tương ứng của các bất đẳng thức này, ta được

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 64abc,$$

Do $a > 0, b > 0, c > 0$ nên $abc > 0$, nên có thể chia hai vế của bất đẳng thức này cho abc :

$$\frac{1+a}{a} \cdot \frac{1+b}{b} \cdot \frac{1+c}{c} \geq 64,$$

$$\text{hay } (1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})(1 + \frac{1}{c}) \geq 64.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 33. Các số a, b thỏa mãn hệ thức

$$2a + 3b = 5.$$

Chứng minh rằng $2a^2 + 3b^2 \geq 5$.

Giải: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiôpki, ta được

$25 = (2a + 3b)^2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2a} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3b})^2 \leq (2 + 3)(2a^2 + 3b^2)$.
hay:

$$5 \leq 2a^2 + 3b^2.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot b}{\sqrt{3}}$, hay $a = b = 1$.

Ví dụ 34. Cho các số x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng:

$$|x + 2y + 3z| \leq \sqrt{14}.$$

Giải : Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta được

$$\begin{aligned} (x + 2y + 3z)^2 &= (1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z)^2 \leq \\ &\leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2), \end{aligned}$$

hay

$$(x + 2y + 3z)^2 \leq 14 \cdot 1.$$

Vậy

$$|x + 2y + 3z| \leq \sqrt{14}.$$

Ví dụ 35. Chứng minh rằng

$$|ab + bc + ca| \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta được

$$(ab + bc + ca)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2),$$

hay

$$(ab + bc + ca)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Vậy

$$|ab + bc + ca| \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

6. Ứng dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

Ví dụ 36. Cho $-1 \leq a \leq 2$; $-1 \leq b \leq 2$; $-1 \leq c \leq 2$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 6.$$

Giải: Theo tính chất của tam thức bậc hai thì

$-1 \leq a \leq 2$ tương đương với $(a - 2)(a + 1) \leq 0$.

Tương tự, cũng có $(b - 2)(b + 1) \leq 0$; $(c - 2)(c + 1) \leq 0$

Do vậy:

$$(a - 2)(a + 1) + (b - 2)(b + 1) + (c - 2)(c + 1) \leq 0$$

hay

$$(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c) - 6 \leq 0,$$

hay

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 6, \text{ (do } a + b + c = 0\text{)}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 37. (A-1983). a, b, c là ba số thỏa mãn các hệ thức:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2, \quad (1)$$

$$ab + bc + ca = 1. \quad (2)$$

Chúng minh rằng $-\frac{4}{3} \leq a \leq \frac{4}{3}; -\frac{4}{3} \leq b \leq \frac{4}{3}; -\frac{4}{3} \leq c \leq \frac{4}{3}$.

Giải: Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 4,$$

hay $(a + b + c)^2 = 4$.

Đặt $S = a + b + c$, ta có:

$$a + b = S - c,$$

$$ab = 1 - c(a + b) = 1 - c(S - c) = c^2 - Sc + 1;$$

hay a, b là nghiệm của phương trình bậc 2:

$t^2 - (S - c)t + c^2 - Sc + 1 = 0$. Vì phương trình này có nghiệm, nên phải có:

$$\Delta = (S - c)^2 - 4(c^2 - Sc + 1) = -3c^2 + 2Sc \geq 0,$$

(vì $S^2 = 4$).

Để ý rằng $2Sc \geq 3c^2 \geq 0$, nên có thể viết

$Sc = |Sc| = 2|c|$, (vì $|S| = 2$).

Vậy phải có $-3|c|^2 + 4|c| \geq 0$, từ đó suy ra

$$0 \leq |c| \leq \frac{4}{3},$$

hay $-\frac{4}{3} \leq c \leq \frac{4}{3}$

Tương tự đối với a và b.

Ví dụ 38. Chứng minh rằng mọi x, y, ta đều có

$$x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3 > 0.$$

Giải: Ta viết vế trái của bất đẳng thức dưới dạng một tam thức bậc hai theo biến x:

$$f(x) = x^2 + 2(1 - 2y)x + 5y^2 - 6y + 3.$$

Khi đó biệt thức

$$\begin{aligned} \Delta' &= (1 - 2y)^2 - (5y^2 - 6y + 3) = \\ &= 1 - 4y + 4y^2 - 5y^2 + 6y - 3 = \\ &= -y^2 + 2y - 2 = -(y - 1)^2 - 1 < 0. \end{aligned}$$

Do vậy, $f(x) > 0$, với mọi x. Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 39. Chứng minh rằng với mọi x, ta đều có

$$\frac{1}{3} \leq \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \leq 3.$$

Giải: Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} - 3 \right) \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{3} \right) \leq 0,$$

hay $\frac{x^2 + x + 1 - 3(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} \cdot x$

$$\cdot x \frac{3(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)}{3(x^2 - x + 1)} \leq 0,$$

$$\text{hay} \quad \frac{-2(x-1)^2}{x^2-x+1} - \frac{2(x+1)^2}{3(x^2-x+1)} \leq 0,$$

$$\text{hay} \quad \frac{-4(x^2-1)^2}{3(x^2-x+1)} \leq 0. \text{ Bất đẳng thức này đúng.}$$

Vậy bất đẳng thức đã cho là đúng.

Ví dụ 40. Chứng minh rằng với $x \geq 2$, thì

$$(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x \geq 6.$$

Giải: Nhận xét rằng

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x \cdot (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = \\ & = (\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})})^x = 1^x = 1. \end{aligned}$$

Do vậy, nếu đặt

$$(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x = t, \text{ thì } t \geq 3+2\sqrt{2} \text{ với } x \geq 2.$$

$$\text{và } (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = \frac{1}{t}.$$

Do đó, bất đẳng thức đã cho trở thành

$$t + \frac{1}{t} \geq 6.$$

$$\text{hay} \quad f(t) = t^2 - 6t + 1 \geq 0. \quad (1)$$

Tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm $t_1 = 3 - 2\sqrt{2}$ và $t_2 = 3 + 2\sqrt{2}$. Do vậy, khi $t \geq t_2 = 3 + 2\sqrt{2}$, thì (1) đúng. Suy ra bất đẳng thức ban đầu là đúng; dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x = 3+2\sqrt{2}, \text{ hay } x = 2.$$

Ví dụ 41. Chứng minh rằng.

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

(Bất đẳng thức Bunhiôpski).

Giải: Ta viết bất đẳng thức đã cho dưới dạng:

$$(ax + by + cz)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \leq 0. \quad (1)$$

1) Nếu $a = b = c = 0$, thì bất đẳng thức đã cho là đúng.

2) Nếu a, b, c không đồng thời bằng không, hay $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ thì tam thức bậc hai:

$$\begin{aligned} f(t) &= (a^2 + b^2 + c^2)t^2 - 2(ax + by + cz)t + x^2 + y^2 + z^2 = \\ &= (a^2t^2 - 2axt + x^2) + (b^2t^2 - 2byt + y^2) + (c^2t^2 - 2czt + z^2) = \\ &= (at - x)^2 + (bt - y)^2 + (ct - z)^2 \geq 0, \text{ với mọi } t. \end{aligned}$$

Do vậy, biệt thức $\Delta' \leq 0$, hay (1) đúng. Cũng theo định lý về dấu của tam thức bậc hai, thì dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tồn tại một số k sao cho $x = ka, y = kb, z = kc$.

Ví dụ 42. Chứng minh rằng:

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \leq (ac - bd)^2.$$

Giải: Nếu $c^2 = d^2$ thì bất đẳng thức rõ ràng là đúng.

Còn nếu $c^2 \neq d^2$, ta xét tam thức bậc hai

$$\begin{aligned} f(t) &= (c^2 - d^2)t^2 - 2(ac - bd)t + a^2 - b^2 = (c^2t^2 - 2act + a^2) - (d^2t^2 - 2bdt + b^2) = \\ &= [(c + d)t - (a + b)][(c - d)t - (a - b)]. \end{aligned}$$

Vậy tam thức bậc hai $f(t)$ có hai nghiệm $t_1 = \frac{a+b}{c+d}$ và

$$t_2 = \frac{a-b}{c-d}.$$

Do vậy, biệt thức $\Delta' \geq 0$, hay:

$$(ac - bd)^2 - (c^2 - d^2)(a^2 - b^2) \geq 0,$$

hay là $(ac - bd)^2 \geq (c^2 - d^2)(a^2 - b^2)$,

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

7. Phương pháp miền giá trị hàm

a) *Cơ sở lý thuyết.* Để chứng minh bất đẳng thức $A > B$ (1), trong đó A, B là các biểu thức phụ thuộc vào x , ta xét bất đẳng thức tương đương với (1) là: $A - B > 0$ (2).

Đặt $y = A - B$ (3). Do $A = A(x), B = B(x)$ nên (3) là phương trình $y - (A(x) - B(x)) = 0$ phụ thuộc tham số y .

Biện luận phương trình theo y ta suy ra được điều kiện $y \in (a, b)$ chính là được ràng buộc: $a < y < b$ sẽ suy ra (2) $\Leftrightarrow$ (1)

Ví dụ 43. Chứng minh rằng với mọi x , ta có

$$\frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} > \frac{1}{3} \quad (1)$$

Giải: Xét $y = \frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1}$ (2), để chứng minh (1), ta cần xét nhiều giá trị của y trong biểu thức hàm số (2).

Ta thấy: $\forall x \in \mathbb{R}$, qua (2) ta tìm được y tương ứng. Tuy nhiên $\forall y \in \mathbb{R}$ thì qua (2) chưa chắc đã xác định được x để thoả mãn (2) theo y đã cho. Tức là: $\exists a, b \in \mathbb{R}$ sao cho $y \in (a, b)$ sẽ tính được x tương ứng theo y để (2) đúng. Hay, phương trình (2) sẽ có nghiệm theo tham số $y \in (a, b)$:

$$\begin{aligned} (2) \quad & \Leftrightarrow (2x^2 + x + 1)y = 2x^2 - x + 1 \\ & \Leftrightarrow 2(y - 1)x^2 + (1 + y)x + (y - 1) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Nếu $y = 1$: (3) có nghiệm $x = 0$.

Nếu $y \neq 1$: (3) có nghiệm khi

$$\Delta = (1 + y)^2 - 8(y - 1)^2 \geq 0 \text{ hay } -7y^2 + 18y - 7 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{9 - 4\sqrt{2}}{7} \leq y \leq \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7} \quad (4)$$

Vậy miền giá trị của hàm số (2) là đoạn $\left[\frac{9 - 4\sqrt{2}}{7}, \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7} \right]$ và để chứng minh (1) chỉ cần kiểm tra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} < \frac{9 - 4\sqrt{2}}{7} \text{ (2)} & \Leftrightarrow 7 < 27 - 12\sqrt{2} \Leftrightarrow 12\sqrt{2} < 20 \\ & \Leftrightarrow 3\sqrt{2} < 5 \Leftrightarrow 18 < 25 - \text{hiển nhiên.} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{3} < \frac{9 - 4\sqrt{2}}{7} \leq \frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1}.$$

Ví dụ 44. Tìm các giá trị a để hệ bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi giá trị thực của x .

$$-9 < \frac{3x^2 + ax - 6}{x^2 - x + 1} < 6 \quad (1)$$

Giải : Xét $y = \frac{3x^2 + ax - 6}{x^2 - x + 1}$ (2), do điều kiện (1):

$y \in (-9, 6)$ và do (1) nghiệm đúng $\forall x$, suy ra phương trình (2) có nghiệm với $\forall y \in (-9, 6)$ nên :

(2) $\Leftrightarrow (y - 3)x^2 - (a + y)x + (y + 6) = 0$ (4) có nghiệm, hay biệt thức Δ của (4) không âm:

$$\Delta = (a + y)^2 - 4(y + 6)(y - 3) \geq 0 \quad \forall y \in (-9, 6)$$

$$\Rightarrow f(y) = \Delta = -3y^2 + 2y(a - 6) + a^2 + 72 \geq 0. \quad (5)$$

Bất phương trình (5) có hệ số bậc cao $a = -3 < 0$ nên nghiệm của (5) là khoảng hữu hạn (y_1, y_2) với y_1, y_2 là nghiệm của tam thức $f(y) = \Delta$ cho bởi (5), xét $y = 3$ thì (4) là phương trình bậc 1 luôn có nghiệm. Do điều kiện $y \in (-9, 6) \Rightarrow y_1 < -9 < 6 < y_2$. Theo định lý đảo về dấu của tam thức bậc 2:

$$f(-9) = a^2 - 18a - 63 < 0 \Rightarrow a \in (-3, 21) \Rightarrow$$

$$f(6) = a^2 + 12a - 108 < 0 \Rightarrow a \in (-18, 6) \Rightarrow$$

$a \in (-3, 6)$, hay điều kiện với a :

$$-3 < a < 6.$$

Ví dụ 45. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{5} \leq \frac{4.49^a - 8.21^a + 9^{a+1}}{4.49^a + 8.21^a + 9^{a+1}} \leq 5 \quad \text{với } \forall a.$$

Giải : Xét $y = \frac{4.49^a - 8.21^a + 9^{a+1}}{4.49^a + 8.21^a + 9^{a+1}}$ có nghiệm.

Biến đổi phương trình:

$$4.49^a(1 - y) - 8.21^a(1 + y) + 9^{a+1}(1 - y) = 0 \quad (1). \text{ Chia 2 vế cho } 9^a:$$

$$(4) \Leftrightarrow 4(1-y)\left(\frac{7}{3}\right)^{2a} - 8(1+y)\left(\frac{7}{3}\right)^a + 9(1-y) = 0.$$

Xét $y = 1$ ta có phương trình bậc 1 luôn có nghiệm.

Để phương trình có nghiệm xét

$$\Delta' = 16(1+y)^2 - 36(1-y) = -20y^2 + 104y - 20 \geq 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = -4(5y^2 - 26y + 5) \geq 0 \Rightarrow 5y^2 - 26y + 5 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq y \leq 5.$$

8. Ứng dụng đạo hàm để chứng minh bất đẳng thức.

Ví dụ 46. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$, $0 < \alpha < 1$ ta đều có

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leq 0. \quad (1)$$

Giải: Đặt $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$, ta được $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha$ và $f(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$.

Do vậy, khi $x > 0$, thì $f'(x) < 0$. Suy ra, tại điểm $x = 1$ (tại đó $f'(x) = 0$), hàm số $f(x)$ đạt cực đại. Vậy ta có bảng xét dấu:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
			-
$f(x)$		$f(1)$	

Suy ra $f(x) \leq f(1) = 0$ với mọi $x \geq 0$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Chú ý: Nếu thay điều kiện $0 < \alpha < 1$ bằng một trong hai điều kiện $\alpha > 1$ hoặc $\alpha < 0$ thì dấu của bất đẳng thức (1) sẽ đổi chiều.

Ví dụ 47. Các số α, β, γ thỏa mãn các điều kiện: $\alpha \leq 6; \beta \leq -8, \gamma \leq 3$. Chứng minh rằng, khi đó với mọi $x \geq 1$ ta đều có:

$$x^4 \geq \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Giải: Xét hàm số

$$f(x) = x^4 - (\alpha x^2 + \beta x + \gamma).$$

Khi đó, $f'(x) = 4x^3 - (2\alpha x + \beta)$,

$$f(x) = 12x^2 - 2\alpha.$$

Khi $x \geq 1$, thì $f(x) \geq 12 - 2\alpha = 2(6 - \alpha) \geq 0$. Do vậy $f(x)$ là một hàm số đồng biến khi $x \geq 1$. Ta có $f(1) = 4 - (2\alpha + \beta) = 4 - 2\alpha - \beta \geq 4 - 2.6 - (-8) = 0$. Suy ra $f(x) \geq f(1) \geq 0$, khi $x \geq 1$. Do vậy hàm số $f(x)$ là một hàm số đồng biến khi $x \geq 1$. Vậy $f(x) \geq f(1)$ khi $x \geq 1$.

Mà $f(1) = 1 - (\alpha + \beta + \gamma) \geq 1 - (6 - 8 + 3) = 0$.

Vậy $f(x) \geq 0$ khi $x \geq 1$. Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 48. Chứng minh rằng với mọi x ta đều có

$$x^5 + (1-x)^5 \geq \frac{1}{16}.$$

Giải: Xét hàm số $f(x) = x^5 + (1-x)^5$. Ta có

$$f(x) = 5x^4 - 5(1-x)^4 = 5[(x^2 + (1-x)^2)(2x-1)].$$

$$f'(x) = 20x^3 + 20(1-x)^3 = 20[x^3 + (1-x)^3].$$

$f'(x) = 0$, chỉ tại $x = \frac{1}{2}$, tại đó $f''(x) = f''(\frac{1}{2}) > 0$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f'x$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Do vậy hàm số $f(x)$ đạt giá trị cực tiểu duy nhất tại $x = \frac{1}{2}$.

nên giá trị $f(\frac{1}{2})$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) \geq f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^5 + (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{16}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 49. Chứng minh rằng với mọi x : $-1 \leq x \leq 1$ ta đều có:

$$\sqrt[4]{2} \leq \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} \leq 2.$$

Giải: Đặt $f(x) = \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x}$; khi đó, nếu $x = \pm 1$ thì $f(x) = \sqrt[4]{2}$.

Xét $-1 < x < 1$. Ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{4\sqrt[3]{(1-x)^3}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{(1+x)^3}} = \\ &= -\frac{\sqrt[4]{(1+x)^3} - \sqrt[4]{(1-x)^3}}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}}. \end{aligned}$$

$f(x) = 0$, khi $x = 0$; $f'(x) > 0$ khi $x < 0$; $f'(x) < 0$ khi $x > 0$. Ta có bảng xét dấu:

x	-1	0	1
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(0)$	
	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[4]{2}$

Vậy khi $-1 \leq x \leq 1$, $f(x) \leq f(0) = 2$, và

$$f(x) \leq f(-1) = \sqrt[4]{2}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

9. Phương pháp quy nạp.

Ví dụ 50. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các cạnh của một tam giác vuông với c là cạnh huyền, thì với mọi n nguyên dương, ta đều có

$$a^{2n} + b^{2n} \leq c^{2n}. \quad (1)$$

Giải: Với $n = 1$, (1) có dạng $a^2 + b^2 \leq c^2$. Bất đẳng thức này đúng, vì theo định lý Pitago thì $a^2 + b^2 = c^2$. Giả sử rằng $a^{2n} + b^{2n} \leq c^{2n}$ đúng với mọi n nguyên dương và $n \leq k$, ta cần chứng minh rằng

$$a^{2(k+1)} + b^{2(k+1)} \leq c^{2(k+1)}.$$

Thật vậy, ta có

$$a^{2(k+1)} + b^{2(k+1)} = a^{2k} \cdot a^2 + b^{2k} \cdot b^2 < a^{2k} \cdot c^2 + b^{2k} \cdot c^2 = \\ = c^2(a^{2k} + b^{2k}) \leq c^2 \cdot c^{2k} = c^{2k+2} = c^{2(k+1)}.$$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh cho mọi n nguyên dương.

Ví dụ 51. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 1$ ta đều có:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Giải: Ký hiệu vế trái của bất đẳng thức là S_n . Với $n = 2$ ta được:

$$S_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}.$$

Giả sử bất đẳng thức đúng với $2 \leq n \leq k$, ta chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, ta có:

$$S_{k+1} = \frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \dots + \frac{1}{2(k+1)} = \\ = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}; \text{ từ đó:}$$

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \\ = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > 0, \text{ khi } k > 1.$$

Do vậy $S_{k+1} > S_k > \frac{13}{24}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh cho mọi $n > 1$.

Ví dụ 52. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta đều có

$$2^{n+2} > 2n + 5.$$

Giải: Với $n = 1$, ta thấy $2^{1+2} = 2^3 = 8 > 2 \cdot 1 + 5$, hay bất đẳng thức đúng.

Giải sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, tức $2^{k+2} > 2k + 5$, ta chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$, tức là

$$2^{k+1+2} > 2(k+1) + 5.$$

Thật vậy, theo giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} 2^{k+1+2} &= 2 \cdot 2^{k+2} > 2(2k+5) = 4k+10 > 2k+7 = \\ &= 2(k+1) + 5. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với mọi n nguyên dương.

Ví dụ 53. Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ ta đều có

$$2^x > x.$$

Giải. Xét $0 < x \leq 1$, ta được $2^x > 2^0 = 1 \geq x$, hay bất đẳng thức đúng. Tương tự, khi $1 < x \leq 2$, ta được $2^x > 2^1 = 2 \geq x$. Ta sẽ chứng minh rằng, khi $k+1 < x \leq k+2$, k - nguyên dương, thì cũng có $2^x > x$. Thật vậy, theo kết quả chứng minh quy nạp, ở ví dụ 50, ta có:

$$2^x > 2^{k+1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{k+2} > \frac{1}{2}(2k+5) = k+2 + \frac{1}{2} >$$

$$> k+2 \geq x.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 54. Chứng minh rằng với mọi a , ta đều có:

$$\sqrt{a^2 + \sqrt{a^2 + \dots + \sqrt{a^2}}} \leq |a| + 1. \quad (1)$$

(vế trái gồm n căn).

Giải: Ký hiệu vế trái của (1) là T_n

Với $n = 1$, ta được $\sqrt{a^2} = |a| \leq |a| + 1$, vậy bất đẳng thức đúng. Giả sử rằng bất đẳng thức đúng với $1 \leq n \leq k$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n = k+1$. Thật vậy, khi $n = k+1$, thì vế trái của (1) có thể viết thành:

$$T_{k+1} = \sqrt{a^2 + T_k}.$$

Theo giả thiết quy nạp, ta được $T_{k+1} \leq \sqrt{a^2 + |a| + 1} \leq$

$\leq \sqrt{a^2 + 2|a| + 1} = \sqrt{(|a| + 1)^2} = |a| + 1$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 55. Chứng minh rằng nếu $n \geq 2$, n nguyên, thì

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

Giải: Với $n = 2$, ta có $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < 2 - \frac{1}{2}$ hay $\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$, bất đẳng

thức đúng.

Giả thiết rằng bất đẳng thức đã cho đúng với $n = k$, tức là

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}, \text{ ta cần chứng minh rằng bất đẳng}$$

thức đúng với $n = k + 1$; tức là

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}. \quad (1)$$

Theo giả thiết quy nạp, thì:

$$\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}. \quad (2)$$

Vậy (1) được chứng minh, nếu vế phải của (2) nhỏ hơn $2 - \frac{1}{k+1}$ tức là:

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1},$$

$$\text{hay} \quad \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k},$$

$$\text{hay} \quad \frac{k+2}{(k+1)^2} < \frac{1}{k},$$

hay $k(k+2) < (k+1)^2$. Điều này luôn luôn đúng. Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

10. Phương pháp lượng giác.

Ví dụ 56. Các số a, b, c, d liên hệ bởi các hệ thức

$$a = c\sqrt{1-d^2}; \quad b = d\sqrt{1-c^2}.$$

Chứng minh rằng

$$|a| + |b| \leq 1.$$

Giải: Điều kiện để căn có nghĩa:

$$|d| \leq 1; |c| \leq 1.$$

Từ các hệ thức đã cho ta suy ra:

$$\begin{cases} |a| = |c| \sqrt{1 - |d|^2}, \\ |b| = |d| \sqrt{1 - |c|^2}. \end{cases}$$

Đặt $|x| = \cos\beta$ và $|c| = \cos\alpha : 0 \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}$.

Khi đó:

$$\begin{cases} |a| = \cos\alpha \cdot \sin\beta, \\ |b| = \cos\beta \cdot \sin\alpha. \end{cases}$$

Do vậy: $|a| + |b| = \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha + \beta) \leq 1$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 57. a, b, c là các độ dài các cạnh của một tam giác vuông (c – cạnh huyền); x, y, z là các số liên hệ bởi hệ thức

$$ax + by = cz.$$

Chúng minh rằng:

$$x^2 + y^2 \geq z^2. \quad (1)$$

Giải: Ta có $\frac{a}{c} = \sin A; \frac{b}{c} = \cos A$ (A là góc nhọn đối diện cạnh a).

Do vậy có thể viết hệ thức đã cho dưới dạng

$$x \sin A + y \cos A = z. \quad (2)$$

Nếu $x = y = 0$ thì $z = 0$. Do vậy (1) đúng.

Xét $x^2 + y^2 > 0$. Khi đó, chia hai vế của (2) cho $\sqrt{x^2 + y^2}$ ta được:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin A + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos A = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3)$$

Chọn góc φ sao cho:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi; \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi.$$

(góc φ luôn luôn tồn tại vì

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = 1.)$$

Khi đó (3) có dạng:

$$\cos \varphi \sin A + \sin \varphi \cos A = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

hay
$$\sin(A + \varphi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1 \text{ hay } z^2 \leq x^2 + y^2.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 58. Chứng minh rằng với mọi $n \geq 2$ và với mọi số a ta đều có:

$$-(1 + a^2)^n \leq (2a)^n + (1 - a^2)^n \leq (1 + a^2)^n$$

Giải: Viết bất đẳng thức đã cho dưới dạng:

$$-1 \leq \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^n + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n \leq 1.$$

Đặt $a = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, $-\pi < \varphi < \pi$. Khi đó

$$\begin{aligned} \frac{2a}{1+a^2} &= \frac{2\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \sin \varphi, \\ \frac{1-a^2}{1+a^2} &= \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \cos \varphi, \end{aligned}$$

Do vậy (1) có dạng

$$-1 \leq (\sin \varphi)^n + (\cos \varphi)^n \leq 1.$$

Mà $-1 \leq \sin \varphi \leq 1$, nên $-\sin^2 \varphi \leq \sin^n \varphi \leq \sin^2 \varphi$, khi $n \geq 2$;

$-1 \leq \cos \varphi \leq 1$, nên $-\cos^2 \varphi \leq \cos^n \varphi \leq \cos^2 \varphi$, khi $n \geq 2$;

Cộng các vế tương ứng ta thu được

$$-1 \leq (\sin \varphi)^n + (\cos \varphi)^n \leq 1.$$

Vậy bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Ví dụ 59. Cho các số x, y, z thỏa mãn các điều kiện

1) $0 < x, y, z < 1$; 2) $xy + yz + zx = 1$.

Chứng minh rằng

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Giải: Đặt $x = \operatorname{tg} \alpha, y = \operatorname{tg} \beta, z = \operatorname{tg} \gamma, 0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{4}$. (*)

Khi đó, từ điều kiện (2) ta có:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1,$$

$$\text{hay } \operatorname{tg} \beta (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma) = 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma,$$

$$\text{hay } \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma} = 1, \text{ (vì } 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma \neq 0 \text{ theo (*))},$$

$$\text{hay } \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \gamma) = 1, \text{ (tg}(\alpha + \gamma) \text{ xác định vì theo (*))}$$

$$0 < \alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } \sin \beta \sin(\alpha + \gamma) = \cos \beta \cos(\alpha + \gamma),$$

$$\text{hay } \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0. \text{ Vậy } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}. \text{ (do (*))}.$$

Suy ra:

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi, \text{ hay } 2\alpha + 2\beta = \pi - 2\gamma. \text{ Theo (*) thì}$$

$$\pi - 2\gamma \neq \frac{\pi}{2} \text{ nên ta có } \operatorname{tg}(2\alpha + 2\beta) = \operatorname{tg}(\pi - 2\gamma).$$

Cũng theo (*), ta có $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\beta$, $\operatorname{tg} 2\gamma$ có nghĩa, nên

$$\frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta} = -\operatorname{tg} 2\gamma.$$

hay : $\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta + \operatorname{tg} 2\gamma = \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta \operatorname{tg} 2\gamma,$

hay :

$$\begin{aligned} & \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} + \frac{2\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}^2\gamma} = \\ & = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\beta} \cdot \frac{2\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}^2\gamma} \end{aligned}$$

Vậy $\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}. \quad (1)$

Ký hiệu các giá trị ở từng vế của (1) là T. Khi đó, theo bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương thì:

$$T \geq 3^3 \sqrt{\frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}} = 3^3 \sqrt{T}.$$

Từ đó suy ra $T \geq 3\sqrt{3}.$

Vậy $\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} \geq 3\sqrt{3},$

hay $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$ Bất đẳng thức được chứng minh.

Chú ý. 1. Ngoài một số phương pháp đơn giản được trình bày ở đây, còn rất nhiều phương pháp khác cũng được ứng dụng để chứng minh bất đẳng thức, như các phương pháp hình học, sử dụng các bất đẳng thức cổ điển, phương pháp biểu diễn tuyến tính...

2. Một số dạng bất đẳng thức khác liên quan đến phương pháp tam thức bậc hai, lượng giác và hàm số, các bạn có thể xem ra trong các phần tam thức bậc hai, lượng giác và hàm số tương ứng.

§3. Bài toán với các phương pháp giải khác nhau

Bài toán 1. Chứng minh rằng: nếu $a > 0, b > 0$ thì

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b} \quad (1)$$

Giải: Cách 1. Dùng phép biến đổi tương đương.

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + 2\sqrt{ab} + b > a + b \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} > 0. \quad (2)$$

Do giả thiết $a > 0, b > 0$ nên (2) hiển nhiên đúng, suy ra (1) đúng. Đó là điều phải chứng minh.

$$\text{Cách 2. } (1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{a+b}} > 1 \quad (3)$$

$$\text{Do giả thiết: } a, b > 0 \text{ nên } \frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{a+b}} > \frac{a}{a+b}$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt{\frac{b}{a+b}} > \frac{b}{a+b} \text{ suy ra (3):}$$

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{a+b}} > \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1.$$

Đó là điều phải chứng minh.

Cách 3. Dùng phương pháp hình học

Do $a > 0, b > 0$, nên $\sqrt{a}, \sqrt{b} > 0$

Ta dựng được ΔABC có $\hat{A} = 1v, AB = \sqrt{a}$

Theo định lý Pythagore:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a+b}.$$

Theo bất đẳng thức tam giác

$AB + AC > BC \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$. Đó là điều phải chứng minh.

Bài toán 2. Chứng minh rằng nếu $q > 0, p > 0$ thì:

$$(p+2)(q+2)(p+q) \geq 16pq. \quad (1)$$

Giải: Cách 1. áp dụng bất đẳng thức Côsi với 2 số dương:

$$p + 2 \geq 2\sqrt{2p}, \text{ dấu bằng có khi và chỉ khi } p = 2;$$

$$p + 2 \geq 2\sqrt{2p}, \text{ dấu bằng có khi và chỉ khi } q = 2;$$

$$p + q = 2\sqrt{pq}, \text{ dấu bằng có khi và chỉ khi } p = q;$$

$$\text{Suy ra } (p + 2)(q + 2)(p + q) \geq 8 \cdot \sqrt{2p \cdot 2q \cdot pq} = 16pq.$$

Dấu bằng có khi và chỉ khi $p = q = 2$.

Cách 2. Ta có: (1) $\Leftrightarrow (p + 2)(q + 2)(p + q) - 16pq \geq 0$ (2)

Biến đổi vế trái của (2):

$$\begin{aligned} & (p + 2)(q + 2)(p + q) - 16pq = \\ & = 2p^2 + 2q^2 + 2pq + 2pq + 4p + 4q - 16pq + p^2q + pq^2 \\ & = (p^2q - 4pq + 4q) + (pq^2 - 4pq + 4p) + (2p^2 - 4pq + 2q^2) \\ & = q(p - 2)^2 + p(q - 2)^2 + 2(p - q)^2 \geq 0 \text{ vì } q > 0, p > 0. \end{aligned}$$

Vậy (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $p = q = 2$.

Chú ý: Tương tự cách 1, ta biến đổi vế trái của (1) như sau:

$$\begin{aligned} & [(p + 2)(q + 2)](p + q) = [pq + 4 + 2(p + q)](p + q) = \\ & = (pq + 4)(p + q) + 2(p + q)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } (pq + 4) \geq 2\sqrt{4pq} = 4\sqrt{pq} \Rightarrow (pq + 4)(p + q) \geq 8pq.$$

$$p + q \geq 2\sqrt{pq}$$

$$\text{Mặt khác } p + q \geq 2\sqrt{pq} \Rightarrow (p + q)^2 \geq 4pq \Rightarrow 2(p + q)^2 \geq 8pq.$$

$$\text{Suy ra } (p + 2)(q + 2)(p + q) \geq 8pq + 8pq = 16pq,$$

Đây là điều phải chứng minh.

Bài toán 3. Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc). \quad (1)$$

Giải: Cách 1. Do a, b, c là 3 cạnh của tam giác, ta có các bất đẳng thức sau:

$$a + b > c \Rightarrow ac + bc > c^2,$$

$$b + c > a \Rightarrow ab + ac > a^2,$$

$$a + c > b \Rightarrow ab + bc > b^2.$$

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức này, ta được (1).

Cách 2. Từ các bất đẳng thức tam giác như trên:

$$(a + b - c) > 0, (a - b + c) > 0 \Rightarrow$$

$$[a + b - c][a - (b - c)] > 0 \Leftrightarrow a^2 - (b - c)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 - c^2 + 2bc > 0.$$

$$\text{Tương tự: } b^2 - a^2 - c^2 + 2ac > 0.$$

$$c^2 - a^2 - b^2 + 2ab > 0.$$

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức này ta được:

$$-a^2 - b^2 - c^2 + 2(ab + ac + bc) > 0 \Rightarrow (1).$$

Cách 3. Từ bất đẳng thức tam giác dạng

$$|a - b| < c \Leftrightarrow (a - b)^2 < c^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 < c^2.$$

$$\text{Tương tự: } b^2 - 2bc + c^2 < a^2,$$

$$a^2 - 2ac + c^2 < b^2.$$

Cộng vế với vế 3 bất đẳng thức đó, ta được:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + bc + ac) < 0 \Leftrightarrow (1).$$

Bài toán 4. Chứng minh rằng nếu $m > 0, n > 0$,
thì $m^3 + n^3 \geq mn(m + n)$. (1)

Giải: Cách 1. (1) tương đương với:

$$m^3 + n^3 - mn(m + n) \geq 0. \text{ Ta có:}$$

$$P = m^3 + n^3 - mn(m + n) = (m + n)(m^2 - mn + n^2) -$$

$$mn(m + n) = (m + n)(m - n)^2 \geq 0. \text{ Vậy (1) đúng.}$$

Dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi $m = n$.

$$\text{Cách 2. Từ } (m - n)^2 \geq 0 \Rightarrow m^2 + n^2 \geq 2mn.$$

Dấu (=) khi và chỉ khi $m = n$.

Nhân 2 vế của bất đẳng thức vừa nhận được với $m + n$ ($m + n > 0$) ta có:

$$(m^2 + n^2)(m + n) \geq 2mn(m + n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^3 + n^3 + mn(m + n) \geq 2mn(m + n). \text{ Từ đó suy ra (1).}$$

Chú ý: Ta có thể biến đổi biểu thức P như sau:

$$\begin{aligned} P &= m^3 + n^3 - m^2n - mn^2 = m^2(m-n) - n^2(m-n) = \\ &= (m-n)(m^2 - n^2) = (m-n)^2(m+n) \geq 0. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra (1).

Bài toán 5. Chứng minh rằng nếu $|\alpha| \leq 2$ thì

$$a^2 + \alpha ab + b^2 \geq 0. \text{ Với } \forall a, b \quad (1)$$

Giải: Cách 1. Biến đổi vế trái của (1):

$$\begin{aligned} a^2 + \alpha ab + b^2 &= a^2 + 2a \cdot \frac{\alpha b}{2} + \frac{\alpha^2 b^2}{4} - \frac{\alpha^2 b^2}{4} + b^2 = \\ &= \left(a + \frac{\alpha b}{2}\right)^2 + b^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Vì $|\alpha| \leq 2$ nên $\alpha^2 \leq 4$ và $1 - \frac{\alpha^2}{4} \geq 0$ và do đó (1) đúng.

Dấu $\Leftrightarrow$ có khi và chỉ khi $\alpha = 2$ và $a = -b$ hoặc $\alpha = -2$ và $a = b$.

Cách 2. Xét tam thức bậc hai đối với a :

$$\begin{aligned} f(a) &= a^2 + \alpha b \cdot a + b^2. \text{ Vì } f(a) \text{ có biệt thức } \Delta = \alpha^2 b^2 - 4b^2 = \\ &= b^2(\alpha^2 - 4) \leq 0 \text{ với } \forall b \text{ và } |\alpha| \leq 2 \text{ nên } f(a) \geq 0 \text{ với } \forall a. \end{aligned}$$

Vậy ta có (1).

Cách 3. Từ bất đẳng thức hiển nhiên

$$(|a| - |b|)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2|ab|.$$

Do điều kiện $|\alpha| \leq 2$ nên $a^2 + b^2 \geq 2|ab| \geq |\alpha||ab| \geq \pm \alpha ab$.

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + \alpha ab \geq 0.$$

Bài toán 6. Cho $a \leq b \leq c \leq d$ và $a + d = b + c$,

chứng minh rằng $bc \geq ad$. (1)

Giải: Cách 1. Từ giả thiết suy ra:

$$d - a \geq c - b \geq 0, \text{ vậy } (d - a)^2 \geq (c - b)^2.$$

Mặt khác từ $a + d = b + c$, ta có $(d + a)^2 = (b + c)^2$.

$$\text{Từ đó: } (a + d)^2 - (d - a)^2 \leq (b + c)^2 - (c - b)^2.$$

Vậy $4ad \leq 4bc$, hay $ad \leq bc$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(d - a)^2 = (c - b)^2$. Vì $a \leq b \leq c \leq d$ nên điều kiện đó tương đương với $a = b$ và $c = d$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Cách 2. } a \leq b \Rightarrow a - b \leq 0 \\ b \leq d \Rightarrow b - d \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (a - b)(b - d) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow ab - b^2 - ad + bd \geq 0$$

$\Leftrightarrow b(a + d) - b^2 \geq ad$. Do giả thiết $a + d = b + c$, nên $b(b + c) - b^2 \geq ad$, vậy $bc \geq ad$.

Cách 3. Đặt $S = a - b = c - d$ (do điều kiện $a + d = b + c$, nên đặt S như vậy là tương thích). Từ dãy bất đẳng thức đã cho, ta có $S \leq 0$. Từ cách đặt ta có:

$$d = c - S; a = b + S$$

và $ad = (c - S)(b + S) = bc + (c - b)S - S^2 \leq bc$, (vì $c - b \geq 0$ và $S \leq 0$, nên $(c - b)S \leq 0$). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $S = 0$, hay khi và chỉ khi $a = b$ và $c = d$.

Cách 4. Từ giả thiết $a + d = b + c \Rightarrow c = a + d - b$.

$$\text{Từ đó ta có } bc \geq ad \Leftrightarrow b(a + d - b) - ad \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$b(a - b) + bd - ad \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)(b - d) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì $a - b \leq 0$, $b - d \leq 0$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Dấu (=) có khi và chỉ khi $a = b$ và do đó $c = d$ (vì $a + d = b + c$).

(Trường hợp $b = d$ sẽ kéo theo $a = b = c = d$ chỉ là trường hợp riêng của trường hợp $a = b$ và $c = d$).

Cách 5. Từ giả thiết ta có $a + b \leq c + d$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Từ điều kiện } a + d = b + c \Rightarrow a - b = c - d \leq 0 \\ \Rightarrow (a + b)(a - b) \geq (c + d)(c - d) \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - b^2 \geq c^2 - d^2 \Leftrightarrow a^2 + d^2 \geq b^2 + c^2$$

$$\text{Lại từ } a + d = b + c \Rightarrow a^2 + 2ad + d^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$\Rightarrow ad \leq bc.$$

Bài toán 7. Chứng minh rằng: với $\forall a, b, c$ ta có

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq |a| + |b| + |c|. \quad (1)$$

Giải: **Cách 1.** Không giảm tổng quát coi $a, b, c \geq 0$.

Suy ra: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \leq a + b + c \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$; bất đẳng thức này luôn luôn đúng với $a, b, c \geq 0$, vậy ta có (1)

Cách 2. Áp dụng bài toán 1 ta có

$$\begin{aligned} |a| + |b| &= \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2} \\ \Rightarrow |a| + |b| + |c| &= \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + |c| \geq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2} \\ &\geq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Cách 3. Giả sử $a^2 + b^2 + c^2 > 0$, vì nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ bất đẳng thức trở thành đẳng thức hiển nhiên.

Ta có: $0 \leq \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq 1$, vậy

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Tương tự: $\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \geq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$;

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \geq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

nên: $\frac{|a| + |b| + |c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Cách 4. Áp dụng phương pháp hình học: Dựng hình hộp chữ nhật với các cạnh là $|a|, |b|, |c|$, suy ra đường chéo của hình hộp là $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Trong hình hộp ta có: $|a| + |b| + |c| \geq d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Đây là điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi có 2 cạnh suy biến bằng 0.

Bài toán 8. Cho $a + b + c = 6$. Hãy chứng minh:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 12. \quad (1)$$

Giải: **Cách 1.** Từ các bất đẳng thức hiển nhiên $(a - b)^2 \geq 0$, $(b - c)^2 \geq 0$ và $(c - a)^2 \geq 0 \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \geq 0$.

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2.$$

Theo giả thiết $a + b + c = 6$ nên ta được:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 36. \text{ Vậy (1) được chứng minh.}$$

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Côsi - Bunhiacôpxki:

$$(1 + 1 + 1)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 = 36.$$

$$\text{Suy ra: } a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{36}{3} = 12.$$

Cách 3. Từ điều kiện $a + b + c = 6$, ta có:

$$c = -(a + b) + 6.$$

$$\text{Suy ra (1)} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + (6 - a - b)^2 - 12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - (6 - b)a + b^2 - 6b + 12 \geq 0 \quad (2)$$

Xét tam thức $f(a) = a^2 - (6 - b)a + (b^2 - 6b + 12)$ ta có:

$$\begin{aligned} \Delta_g &= (6 - b)^2 - 4(b^2 - 6b + 12) = -3b^2 + 12b - 12 \\ &= -3(b^2 - 4b + 4) = -3(b - 2)^2 \leq 0, \forall b \end{aligned}$$

Vậy $f(a) \geq 0, \forall a, b \Rightarrow (2) \text{ đúng} \Leftrightarrow (1) \text{ đúng}.$

Bài toán 9: Chứng minh rằng nếu $|b| < \frac{|a|}{2}$ thì

$$\frac{1}{|a - b|} < \frac{2}{|a|}. \quad (1)$$

Giải: Cách 1. Từ giả thiết ta có $a \neq 0$ và $a \neq b$, do đó

$$(1) \Leftrightarrow |a| < 2|a - b|. \quad (2)$$

Từ giả thiết

$$|b| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow 2|b| < |a| \Rightarrow |a| < 2(|a| - |b|).$$

Theo tính chất:

$$|a - b| \geq |a| - |b| \Rightarrow 2|a - b| \geq 2(|a| - |b|) > |a|.$$

Cách 2. Từ giả thiết ta có: $|b| < \frac{|a|}{2} \Leftrightarrow \frac{|b|}{|a|} <$

$$< \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{|a|}{|b|} > \frac{1}{2}. \text{ Vậy:}$$

$$2|a - b| = 2|a| \cdot \left|1 - \frac{b}{a}\right| \geq 2|a| \left(1 - \frac{|b|}{|a|}\right) > |a|.$$

Từ đó ta có $\frac{2}{|a|} > \frac{1}{|a - b|}$

Cách 3. Từ $|a - b| > |a| - |b| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2}{|a|} > \frac{1}{|a - b|}$$

Bài toán 10. Cho $a + b \geq c > 0$. Hãy chứng minh:

a) $a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2}, \quad (1)$

b) $a^4 + b^4 \geq \frac{c^4}{8}. \quad (2)$

Giải: Cách 1. Từ $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab = 2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \Rightarrow 2(a^2 + b^2) \geq c^2 \Rightarrow (1).$

Tương tự: $2(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)^2 \geq \frac{c^4}{4}$, theo (1),

từ đó suy ra (2).

Cách 2. Vì $a + b \geq c > 0$, nên $(a + b)^2 \geq c^2$.

Mặt khác, $(a - b)^2 \geq 0$.

Suy ra $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) \geq c^2 \Rightarrow (1)$

Từ (1) ta có: $(a^2 + b^2) \geq \frac{c^4}{4}$, mặt khác: $(a^2 - b^2)^2 \geq 0 \forall a, b$.

Vậy $(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)^2 = 2(a^4 + b^4) > \frac{c^4}{4}$, từ đó suy ra (2).

Bài toán 11. Chứng minh rằng: nếu $a + b = c$ và $a > 0$, $b > 0$ thì:

$$a^{2/3} + b^{2/3} > c^{2/3}.$$

Giải. Cách 1. Vì $a + b = c$ và $a, b > 0$, nên:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1, \quad 0 < \frac{a}{c} < 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^{2/3} > \frac{a}{c} \\ \text{Tương tự } 0 < \frac{b}{c} < 1 \Rightarrow \left(\frac{b}{c}\right)^{2/3} > \frac{b}{c} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^{2/3}}{c^{2/3}} + \frac{b^{2/3}}{c^{2/3}} > \frac{a+b}{c} = 1.$$

suy ra $a^{2/3} + b^{2/3} > c^{2/3}$.

Cách 2. Vì $0 < a, b$ và $a + b = c$ nên $a^{1/3} < c^{1/3}$ và $b^{1/3} < c^{1/3}$ do đó $c = a + b = a^{2/3} \cdot a^{1/3} + b^{2/3} \cdot b^{1/3} < a^{2/3} \cdot c^{1/3} + b^{2/3} \cdot c^{1/3} = (a^{2/3} + b^{2/3})c^{1/3}$.

$$\text{Vậy: } a^{2/3} = \frac{c}{c^{1/3}} < a^{2/3} + b^{2/3}.$$

Cách 3. Ta sẽ chứng minh $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} > \sqrt[3]{(a+b)^2} \Leftrightarrow$

$$(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^3 = a^2 + b^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2}(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}) > (a+b)^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi với 2 số $\sqrt[3]{a^2}$ và $\sqrt[3]{b^2}$ ta có:

$$3\sqrt[3]{a^2b^2}(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}) \geq 6\sqrt[3]{a^2b^2} \quad \sqrt[3]{ab} = 6ab$$

$$\text{Vậy: } (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2})^3 = a^2 + b^2 + 3\sqrt[3]{a^2b^2}(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}) \geq \\ \geq a^2 + b^2 + 6ab > (a+b)^2,$$

hay ta được:

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} > \sqrt[3]{(a+b)^2}$$

Thay $a + b = c$ suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 12. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{b^2}{a}} + \sqrt{\frac{a^2}{b}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad (1) \text{ với } a > 0, b > 0.$$

Giải: Cách 1. Biến đổi tương đương:

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{b^2}{a}} + \sqrt{\frac{a^2}{b}}\right)^2 \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{b^2}{a} + 2\sqrt{ab} + \frac{a^2}{b} \geq a + 2\sqrt{ab} + b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} \geq a + b \Leftrightarrow \frac{b^2}{a} - a + \frac{a^2}{b} - b \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{b^2 - a^2}{a} + \frac{a^2 - b^2}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(b^2 - a^2)(b - a)}{ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(b - a)^2(a + b)}{ab} \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng vì $a > 0, b > 0$, nên (1) đúng.

$$\text{Cách 2. Xét hiệu số } A = \sqrt{\frac{b^2}{a}} + \sqrt{\frac{a^2}{b}} - \sqrt{a} - \sqrt{b} =$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{a} + \frac{a}{b}\sqrt{b} - \sqrt{a} - \sqrt{b} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{a}\left(\frac{b}{a} - 1\right) + \sqrt{b}\left(\frac{a}{b} - 1\right) = \frac{b-a}{\sqrt{a}} + \frac{a-b}{\sqrt{b}} = \\
&= \frac{(b-a)(\sqrt{b} - \sqrt{a})}{\sqrt{ab}} = \\
&= \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{ab}} \geq 0, \forall a, b > 0, \text{ suy ra (1).}
\end{aligned}$$

Cách 3. Biến đổi tương đương:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{b^3} + \sqrt{a^3}}{\sqrt{ab}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{a})(a - \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{ab}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{a - \sqrt{ab} + b}{\sqrt{ab}} \geq 1 \Leftrightarrow a - \sqrt{ab} + b \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này luôn đúng, vậy (1) đúng.

Bài toán 13. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có:

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \quad (1)$$

Giải. Cách 1. Chứng minh bằng quy nạp toán học.

$$\text{Đặt } S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Với $n = 2$ ta có $S_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. Rõ ràng:

$$\sqrt{2} < S_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < 2\sqrt{2}. \text{ Vậy (1) đúng với } n = 2.$$

Giả sử (1) đúng với $n = k$, từ là $\sqrt{k} < S_k < 2\sqrt{k}$, ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, nghĩa là phải chứng minh:

$$\sqrt{k+1} < S_{k+1} < 2\sqrt{k+1} \quad (2)$$

Ta có:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k(k+1)} + 1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} \text{ vì } \sqrt{k(k+1)} > k.$$

Vậy vế trái của (2) đúng. Mặt khác ta có:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{2\sqrt{k}\sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1}}. \quad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương k và $k + 1$ ta có $2\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1} < k + k + 1$, từ đó $2\sqrt{k} \cdot \sqrt{k+1} + 1 < 2(k+1)$. Vì vậy, từ (3) ta có

$$S_{k+1} < \frac{2(k+1)}{\sqrt{k+1}} = 2\sqrt{k+1}; \text{ vế phải của (2) được chứng minh}$$

và (2) được chứng minh hoàn toàn. Vậy (1) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Cách 2. Dùng phương pháp so sánh.

$$\text{Với các số tự nhiên } k < n \text{ ta có } \frac{1}{k} > \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (4)$$

$$\text{Từ đó } S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Vậy bất đẳng thức bên trái của (1) được chứng minh.

Mặt khác, với mọi số tự nhiên k ta có:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{k}} &= \frac{2}{2\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k + \sqrt{k-1}}} = \\ &= \frac{2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})}{(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).\end{aligned}\quad (5)$$

Lấy tổng các vế phải và các vế trái của các bất đẳng thức (5) với k từ 1 đến n ta được

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2[(\sqrt{1} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + \dots$$

$\dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})] = 2\sqrt{n}$. Vậy bất đẳng thức bên phải của (1) được chứng minh và (1) được chứng minh hoàn toàn.

Bài toán 14. Chứng minh rằng $\forall n > 1$, (n là số tự nhiên), ta có:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

Giải. Đặt $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k}$ khi đó,

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

$$S_{k+1} = S_k - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} = S_k + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}.$$

Do $\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0$ nên $S_{k+1} > S_k, \forall k \geq 0$.

$$\text{Vậy: } S_n > S_{n-1} > \dots > S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}.$$

Lời giải bài toán trên có thể trình bày dưới hình thức quy nạp toán học. Bạn đọc có thể tự diễn đạt lấy.

Bài toán 15. Chứng minh rằng $\forall a_i, i = \overline{1, n}$ và n là số tự nhiên, ta có

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2). \quad (1)$$

Giải: Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki với các số $a_i (i = 1, n)$ và với n số 1, ta được:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 &= (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1)^2 \leq \\ &\leq \underbrace{(1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)}_{n \text{ lần}} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) = n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2). \end{aligned}$$

Ta được (1).

Cách 2. Chứng minh bằng khai triển:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + \\ &+ 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n. \end{aligned}$$

Do bất đẳng thức $2a_i a_j \leq a_i^2 + a_j^2, 1 \leq i < j \leq n$, suy ra:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 &\leq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \\ &+ (a_1^2 + a_2^2) + (a_1^2 + a_3^2) + \dots + (a_1^2 + a_n^2) + (a_2^2 + a_3^2) \\ &+ (a_2^2 + a_4^2) + \dots + (a_{n-1}^2 + a_n^2) = n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2). \end{aligned}$$

Cách 3. Chứng minh bằng phép quy nạp toán học.

$$\text{Đặt } S_n^1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n; S_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

với $n = 1$, ta được đẳng thức đúng $a_1^2 = a_1^2$.

với $n = 2$, ta cần chứng minh:

$$(a_1 + a_2)^2 \leq 2(a_1^2 + a_2^2).$$

Bất đẳng thức đúng vì $2a_1a_2 \leq a_1^2 + a_2^2$. Vậy mệnh đề trên đúng với $n = 2$.

Giả sử bài toán đúng với $n = k$, tức là ta có:

$$(S_k^1)^2 \leq k \cdot S_k^2.$$

$$\text{Xét } (S_{k+1}^1)^2 = (S_k^1 + a_{k+1})^2 = (S_k^1)^2 + 2a_{k+1} \cdot S_k^1 + a_{k+1}^2.$$

$$\text{Từ bất đẳng thức: } 2a_{k+1}a_i \leq a_i^2 + a_{k+1}^2, \forall i = \overline{1, k}.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } (S_{k+1}^1)^2 &\leq (S_k^1)^2 + (a_1^2 + a_{k+1}^2) + (a_2^2 + a_{k+1}^2) + \dots + \\ &+ (a_k^2 + a_{k+1}^2) + a_{k+1}^2 \leq k \cdot S_k^2 + S_k^2 + (k+1)a_{k+1}^2 = \\ &= (k+1)(S_k^2 + a_{k+1}^2) = (k+1) \cdot S_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Vậy mệnh đề quy nạp đúng với $k + 1$. Bài toán được chứng minh.

Bài toán 16. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y , ta có

$$25(x^2 + y^2) + (12 - 3x - 4y)^2 - 72 \geq 0. \quad (1)$$

Giải: *Cách 1.* Xét biểu thức:

$$\begin{aligned} A &= 25(x^2 + y^2) + (12 - 3x - 4y)^2 - 72 = \\ &= 25x^2 + 25y^2 + 144 + 9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y + 24xy - 72 \\ &= (9y^2 - 24xy + 16x^2) + (18x^2 + 3y^2 + 72 - 72x - 96y + 48xy) \\ &= (3y - 4x)^2 + 2[(3x)^2 + (4y)^2 + 6^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 \cdot 4y + 2 \cdot 3x \cdot 4y] \\ &= (3y - 4x)^2 + 2(3x + 4y - 6)^2, \geq 0 \quad \forall x, y. \end{aligned}$$

Vậy (1) được chứng minh, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 3y - 4x = 0 \\ 3x + 4y - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{Giải hệ ta được } x = \frac{18}{25}, y = \frac{24}{25}.$$

Cách 2. Biến đổi vế trái của (1) thành tam thức bậc hai theo x , ta được:

$$\begin{aligned} A &= 34x^2 - 6x(12 - 4y) + (12 - 4y)^2 + 25y^2 - 72 = \\ &= 34x^2 - 24x(3 - y) + (41y^2 - 96y + 72). \end{aligned}$$

Biệt thức của tam thức này:

$$\begin{aligned} \Delta_y' &= [12(3 - y)]^2 - 34(41y^2 - 96y + 72) = \\ &= -2(625y^2 - 1200y + 576) \\ &= -2(25y - 24)^2 \leq 0, \quad \forall y. \end{aligned}$$

Vậy tam thức $A \geq 0, \forall x$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\Delta_y' = 0 \Rightarrow y = \frac{24}{25}.$$

$$x = \frac{24(3 - y)}{68} = \frac{6(3 - \frac{24}{25})}{17} = \frac{18}{25}.$$

Cách 3. Làm tương tự cách 2 với việc đặt $y = kx$. Biến đổi vế trái của (1), thành tam thức bậc hai đối với x , ta có:

$$A = (41k^2 + 24k + 34)x^2 - 24(3 - 4k)x + 72. \quad (2)$$

Biệt thức của (2) là:

$$\begin{aligned} \Delta' &= 144(3 + 4k)^2 - 72(41k^2 + 24k + 34) = \\ &= -72(3k - 4)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $\forall x, k$ vì hệ số của x^2 là $41k^2 + 24k + 34$ luôn luôn dương. Dấu bằng xảy ra khi $k = \frac{4}{3}$, suy ra:

$$x = \frac{18}{25} \text{ và } y = \frac{24}{25}.$$

Bài toán 17. Chứng minh rằng với $x, y \geq 1$ thì:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}.$$

Giải: Cách 1. Xét hiệu của hai vế:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} - \frac{2}{1+xy} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+y^2} \\ &- \frac{1}{1+xy} = \frac{xy - x^2}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{xy - y^2}{(1+y^2)(1+xy)} = \\ &= \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} - \frac{y(y-x)}{(1+y^2)(1+xy)} = \\ &= \frac{y-x}{1+xy} \left[\frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2} \right] = \frac{(y-x)}{(1+xy)} \cdot \frac{(xy^2 - yx^2 + x - y)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \\ &= \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+xy)(1+x^2)(1+y^2)} \geq 0 \text{ vì } xy \geq 1. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } P \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}.$$

Dấu bằng đạt được khi $x = y$ hoặc $xy = 1$.

Cách 2. Sử dụng kết quả phụ sau (bạn đọc tự kiểm tra lấy):

Nếu $a \leq b$, $b > k \geq 0$ thì $\frac{a}{b} \geq \frac{a-k}{b-k}$.

Dấu (=) đạt được khi và chỉ khi $a = b$ hoặc $k = 0$.

Bây giờ ta biến đổi vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{1+x^2+1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{2+x^2+y^2}{1+x^2+y^2+x^2y^2}.$$

Áp dụng kết quả phụ trên $a = 2 + x^2 + y^2$, $b = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$, $k = x^2 + y^2 - 2xy$ ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} &\geq \frac{(2+x^2+y^2) - (x^2+y^2-2xy)}{(1+x^2+y^2+x^2y^2)(x^2+y^2-2xy)} = \\ &= \frac{2(1+xy)}{(1+xy)^2} = \frac{2}{1+xy}. \text{ Đây là điều phải chứng minh.} \end{aligned}$$

Dấu (=) đạt được khi và chỉ khi $a = b$, tức là $xy = 1$ hoặc $k = 0$ tức là $x = y$.

Bài toán 18: (A – 1980) Cho $a > c$, $b > c$, $c > 0$.

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}. \quad (1)$$

Giải: Cách 1. Biến đổi tương đương.

Cả 2 vế của (1) đều dương nên bình phương cả 2 vế ta được

$$(1) \Leftrightarrow c(a-c) + c(b-c) + 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \leq ab$$

$$\Leftrightarrow 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \leq 2c^2 - c(a+b) + ab$$

$$\Leftrightarrow 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \leq c^2 + (a-c)(b-c)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq c^2 + (a-c)(b-c) - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq [c - \sqrt{(a-c)(b-c)}]^2. \quad (2)$$

Bất đẳng thức (2) đúng, nên (1) đúng. Dấu bằng xảy ra khi:

$$c = \sqrt{(a-c)(b-c)} \text{ hay } c = \frac{ab}{a+b}.$$

Cách 2. Dùng bất đẳng thức Côsi với 2 số dương α, β :

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{ có dấu bằng khi } \alpha = \beta.$$

Trước hết, biến đổi (1):

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{c(a-c)}}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{c(b-c)}}{\sqrt{ab}} \leq 1 \quad (3)$$

Biến đổi về trái của (3) ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{b}} &= \sqrt{\frac{c}{b} \left(\frac{a-c}{b} \right)} + \sqrt{\frac{c}{a} \left(\frac{b-c}{b} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{c}{b} \left(1 - \frac{c}{a} \right)} + \sqrt{\frac{c}{a} \left(1 - \frac{c}{b} \right)} \leq \\ &\leq \frac{\frac{c}{b} + 1 - \frac{c}{a}}{2} + \frac{\frac{c}{a} + 1 - \frac{c}{b}}{2} = 1 \end{aligned}$$

Chú ý: Do điều kiện $0 < c < a, b$ nên $0 < c/a, c/b < 1$, do đó áp dụng được bất đẳng thức Côsi với 2 số.

Cách 3. Áp dụng bất đẳng thức

$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ ta có:

$$\begin{aligned} (\sqrt{c(a-c)} + (\sqrt{c(b-c)}))^2 &= (\sqrt{c} \cdot \sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} \cdot \sqrt{c})^2 \leq \\ &\leq [(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{b-c})^2][(\sqrt{a-c})^2 + (\sqrt{c})^2] = ab. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

Dấu bằng xảy ra khi:

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a-c}} = \frac{\sqrt{b-c}}{\sqrt{c}}, \text{ hay } c = \frac{ab}{a+b}.$$

Cách 4. Ta xem vế trái của (1) là một hàm số của đối số c :

$$y = \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}. \quad (4)$$

Để chứng minh (1) ta cần chỉ ra rằng: khi c thỏa mãn $0 < c < \min\{a, b\}$ thì giá trị tương ứng của hàm số phải thỏa mãn: $y \leq \sqrt{ab}$.

Thật vậy, nếu y_0 là một giá trị của hàm số ứng với một giá trị c nào đó của đối số thì ta có đẳng thức:

$$y_0 = \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}$$

Bằng các phép biến đổi ta thu được:

$$y_0 - \sqrt{c(a-c)} = \sqrt{c(b-c)}$$

$$y_0^2 - 2y_0\sqrt{c(a-c)} + ac - c^2 = bc - c^2,$$

$$y_0^2 + c(a-b) = 2y_0\sqrt{c(a-c)}.$$

$$y_0^4 + 2y_0^2c(a-b) + c^2(a-b)^2 = 4y_0^2ac - 4y_0^2c^2.$$

Chuyển vế và nhóm các số hạng ta thu được đẳng thức:

$$[(a-b)^2 + 4y_0^2]c^2 - 2y_0^2(a+b)c + y_0^4 = 0. \quad (5)$$

Đẳng thức (5) chứng tỏ rằng tam thức bậc hai đối với c ở vế trái có nghiệm, do đó biệt thức của nó $\Delta' \geq 0$

$$\text{hay: } y_0^4(a+b)^2 - y_0^4[(a-b)^2 + 4y_0^2] \geq 0$$

$$\text{hay: } 4y_0^4(ab - y_0^2) \geq 0, \text{ từ đó suy ra } y_0^2 \leq ab$$

$$\text{và } y_0 \leq \sqrt{ab} \quad (6)$$

Vậy: Nếu y_0 là một giá trị của hàm số thì nó phải thỏa mãn (6) và do đó (1) được chứng minh.

Cách 5. Dùng phương pháp đạo hàm tìm cực đại của hàm số:

Vấn xét hàm y cho bởi (4) với đối số x :

$$y = \sqrt{x(a-x)} + \sqrt{x(b-x)}$$

$$y' = [\sqrt{x} \cdot \sqrt{a-x} + \sqrt{x} \sqrt{b-x}]' = [\sqrt{x}(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x})]'$$

$$= (\sqrt{x})'(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}) + \sqrt{x}(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x})' =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}) + \sqrt{x}\left(-\frac{1}{2\sqrt{a-x}} - \frac{1}{2\sqrt{b-x}}\right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}) - \frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \frac{(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x})}{\sqrt{a-x}\sqrt{b-x}} = \\
&= \frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}}{2\sqrt{x}\sqrt{a-x}\sqrt{b-x}} [\sqrt{a-x}\sqrt{b-x} - x] = \\
&= \frac{(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x})[(a-x)(b-x) - x^2]}{2\sqrt{x}(\sqrt{a-x}\sqrt{b-x})(\sqrt{a-x}\sqrt{b-x} + x)} = \\
&= \frac{(\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x})[ab - (a+b)x]}{2\sqrt{x}\sqrt{(a-x)(b-x)}(\sqrt{a-x}\sqrt{b-x} + x)}.
\end{aligned}$$

Trừ biểu thức $[ab - (a+b)x]$, các thừa số còn lại trong biểu thức y' đều dương nên dấu của y' phụ thuộc biểu thức: $ab - (a+b)x$. Có bảng xét dấu sau:

x	0	$\frac{ab}{a+b}$	$\min(a,b)$
y'	+	0	-
y			

Tìm $y_{\max} = y\left(\frac{ab}{a+b}\right) = \sqrt{ab}$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Cách 6. Phương pháp lượng giác.

Vì $0 < c < a$, hay $0 < \frac{c}{a} < 1$, nên tồn tại góc α .

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ sao cho $\frac{c}{a} = \sin^2 \alpha$. Tương tự tồn tại β :

$$\frac{c}{b} = \sin^2 \beta, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}
&\text{Xét vế trái của (1): } \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = \\
&= \sqrt{(a - a \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta} + \sqrt{a \sin^2 \alpha (b - b \sin^2 \beta)} \\
&= \sqrt{ab} (\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta) = \sqrt{ab} \sin(\alpha + \beta) \leq \sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Có dấu bằng khi:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \text{ hay } \sin \alpha = \cos \beta, \text{ tức là } \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 1,$$

$$\text{hay } c = \frac{ab}{a+b}.$$

Bài toán 19. Cho ba số x, y, z thỏa mãn đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \text{ Chứng minh các bất đẳng thức:}$$

$$-\sqrt{x^2 + y^2} \leq xz + y\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Giải: Cách 1. Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$$(xz + y\sqrt{x^2 + y^2})^2 \leq (x^2 + y^2)(z^2 + x^2 + y^2) = x^2 + y^2.$$

Từ đây suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Cách 2. Với 3 số x, y, z thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ta luôn có thể tìm được các góc α, β sao cho $x = \sin \alpha \cos \beta$; $y = \sin \alpha \sin \beta$; $z = \cos \alpha$.

$$\text{Thay vào ta có } xz + y\sqrt{x^2 + y^2} = \sin \alpha \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

$$\text{Vậy } -\sin \alpha \leq xz + y\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sin \alpha,$$

$$\text{tức là: } -\sqrt{x^2 + y^2} \leq xz + y\sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Bài toán 20: Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta} \geq \cot g \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (1), \text{ với } \alpha > \beta > 0 \text{ và } \alpha + \beta < \pi. \quad (2)$$

Giải: Cách 1. Áp dụng các công thức:

$$\cot g a + \cot g b = \frac{\sin(b+a)}{\sin a \sin b}; \cot g a - \cot g b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b} \quad (3)$$

Do các công thức (3):

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \frac{\cot g \alpha + \cot g \beta}{2} \geq \cot g \frac{\alpha + \beta}{2} \\
&\Leftrightarrow \cot g \alpha + \cot g \beta - 2 \cot g \frac{\alpha + \beta}{2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \cot g \alpha - \cot g \frac{\alpha + \beta}{2} + \cot g \beta - \cot g \frac{\alpha + \beta}{2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sin \frac{\beta - \alpha}{2}}{\sin \alpha \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} + \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \beta \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sin \frac{\beta - \alpha}{2} (\sin \beta - \sin \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2 \sin^2 \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \frac{\beta + \alpha}{2}} \geq 0. \tag{4}
\end{aligned}$$

Do hệ điều kiện (2), nên các thừa số ở tích vế trái của (4) là dương. Vậy (4) đúng, do đó (1) được chứng minh.

Cách 2. Biến đổi (1):

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta} \geq \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} \tag{5}$$

Do biến đổi:

$$2 \sin \alpha \sin \beta = 2 \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 - \cos(\alpha + \beta)$$

$= 1 + \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$. Ta chứng minh:

$$1 + \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \geq 2 \sin \alpha \sin \beta \quad (6)$$

Thực vậy: $(6) \Leftrightarrow 1 \geq \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$ (7)

(7) hiển nhiên đúng, chú ý $\sin(\alpha + \beta) > 0$ do điều kiện (2) nên từ (6) suy ra (5).

Cách 3. Áp dụng công thức:

$$\cot g \varphi = \frac{\cot^2 g \frac{\varphi}{2} - 1}{2 \cot g \frac{\varphi}{2}}$$

ta chứng minh (1) như sau:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\cot g \alpha + \cot g \beta}{2} \geq \cot g \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{\cot^2 g \frac{\alpha}{2} - 1}{2 \cot g \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cot^2 g \frac{\beta}{2} - 1}{2 \cot g \frac{\beta}{2}}}{2} \geq$$

$$\geq \frac{\cot g \frac{\alpha}{2} \cot g \frac{\beta}{2} - 1}{\cot g \frac{\alpha}{2} + \cot g \frac{\beta}{2}} \quad (8)$$

$$\text{Đặt } a = \cot g \frac{\alpha}{2}; b = \cot g \frac{\beta}{2}.$$

Do điều kiện $0 < \alpha, \beta$ và $\alpha + \beta < \pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \cot g \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{ab - 1}{a + b} \geq 0$$

$$\text{và } a = \cot g \frac{\alpha}{2} > 0; b = \cot g \frac{\beta}{2} > 0 \quad (9)$$

$$\text{Thay vào (80) ta có: } \frac{\frac{a^2 - 1}{2a} + \frac{b^2 - 1}{2b}}{2} \geq \frac{ab - 1}{a + b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 b - b + ab^2 - a}{4ab} \geq \frac{ab - 1}{a + b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ab - 1)(a + b)}{4ab} - \frac{ab - 1}{a + b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(ab - 1)}{4ab(a + b)} [(a + b)^2 - 4ab] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(ab - 1)(a - b)^2}{4ab(a + b)} \geq 0. \quad (10)$$

Với điều kiện (9) thì (10) đúng, vậy (8) được chứng minh.

Bài toán 21. Chứng minh rằng: nếu $a + b = 2$ thì $a^4 + b^4 \geq 2$.

Giải: Cách 1. Ta có bất đẳng thức sau với mọi x, y (xem bài toán 15):

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2}. \quad (2)$$

Áp dụng (2):

$$a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \geq \frac{1}{2} \left[\frac{(a + b)^2}{2} \right]^2 = 2.$$

vì $a + b = 2$.

Cách 2. Từ $a + b = 2 \Rightarrow a + 2ab + b = 4$.

Suy ra: $2(a^2 + b^2) \geq a^2 + 2ab + b^2 = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2$.

Từ cặp bất đẳng thức:

$$(a^2 + b^2)^2 \geq 4, (a^2 - b^2)^2 \geq 0$$

suy ra: $2(a^4 + b^4) \geq 4 \Rightarrow a^4 + b^4 \geq 2$.

Cách 3. Đặt $a = 1 + c$ và $b = 1 - c$ với c tùy ý.

Do điều kiện $a + b = 2$ nên phép đặt là chấp nhận được. Ta có

$$a^4 + b^4 = (1 + c)^4 + (1 - c)^4 = 2c^4 + 2c^2 + 2 \geq 2, \forall c \text{ vì } c^2 \geq 0, c^4 \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi $c = 0 \Leftrightarrow a = 1, b = 1$.

Cách 4. Từ $a + b = 2$ suy ra $(a + b)^2 = 4$ và từ

$$2ab \leq a^2 + b^2 = 4 - 2ab \Rightarrow ab \leq 1 \text{ và}$$

$$(a^2 + b^2)^2 = (4 - 2ab)^2 = 16 - 16ab + 4a^2b^2.$$

$$\text{Suy ra: } a^4 + b^4 = 4a^2b^2 - 16ab + 16 - 2a^2b^2 =$$

$$= 2a^2b^2 - 16ab + 16 =$$

$$= 2(ab - 1)(ab - 7) + 2 \geq 2 \text{ vì điều kiện } ab \leq 1.$$

Vậy $a^4 + b^4 \geq 2$. Dấu bằng có khi và chỉ khi $ab = 1$, tức là $a = b = 1$.

Bài toán 22. Chứng minh rằng:

$$(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x \leq 6(1) \text{ với } x \text{ thỏa mãn } |x| \geq 2.$$

Giải: Cách 1: Vì $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 9 - 8 = 1$ nên

$$\text{nếu đặt } a = \sqrt{3+2\sqrt{2}}, \text{ thì } \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \frac{1}{a}.$$

Do đó (1) tương đương $a^x + \frac{1}{a^x} \geq 6(2)$, khi $|x| \geq 2$.

$$(2) \Leftrightarrow a^{2x} - 6a^x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow [a^x - (3+2\sqrt{2})][a^x - (3-2\sqrt{2})] \geq 0(3)$$

Từ điều kiện $a = \sqrt{3+2\sqrt{2}} > 1$, nên khi:

$$x \geq 2: a^x \geq a^2 = 3+2\sqrt{2} > 3-2\sqrt{2}, \text{ vậy (3) đúng;}$$

$x \leq -2 : a^x < a^{-2} = 3 - 2\sqrt{2} < 3 + 2\sqrt{2}$, vậy (3) đúng.

Vậy $\forall |x| \geq 2$ hệ thức (3) đúng, (1) được chứng minh.

Cách 2. Đặt $t = (\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^x$. Do điều kiện $|x| \geq 2$ suy ra:

$t \geq 3 + 2\sqrt{2}$ khi $x \geq 2$ và $t \leq 3 - 2\sqrt{2}$ khi $x \leq -2$.

Tam thức bậc hai $f(t) = t^2 - 6t + 1$ có 2 nghiệm:

$$t_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai: $f(t) \geq 0$, khi $t \leq 3 - 2\sqrt{2}$ hoặc khi $3 + 2\sqrt{2} \leq t$.

$$f(t) \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^x \geq 6 \text{ với } |x| \geq 2.$$

Bài toán 23. Chứng minh rằng nếu α, β, γ là 3 góc của một tam giác thì: $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 1,5$. (1)

Giải: Cách 1. Do giả thiết: $\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow$

$$\gamma = \pi - (\alpha + \beta).$$

$$\text{Suy ra: } \cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta) = 1 - 2\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (2)$$

$$\text{Từ đó có (1)} \Leftrightarrow \cos \alpha + \cos \beta + (1 - 2\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}) - 1,5 \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 0,5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - 4\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + 1) \geq 0. \quad (3)$$

Xem vế trái của (3) như một tam thức bậc 2 của biến $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ ta có:

$$\Delta' = 4\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 4 = 4(\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 1) = -4\sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 0$$

Vậy vế trái của (3) luôn ≥ 0 với $\forall \alpha, \beta$, tức là ta có (1). Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta' = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \\ \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = 60^\circ \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow$ tam giác là đều.

Cách 2. Vì $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ nên $\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta)$ và ta có

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} =$$

$$- \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 =$$

$$- 2 \left(\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \right) +$$

$$+ 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = - 2 \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 +$$

$$+ 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \leq \frac{3}{2} \text{ (vì } - 2 \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 \leq 0; \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \leq \frac{1}{2}).$$

$$- \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 0; \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \leq \frac{1}{2}).$$

Ta được bất đẳng thức phải chứng minh.

Dấu (=) đạt được chỉ khi $\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = 1$ và

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0.$$

Từ đẳng thức $\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = 1 \Rightarrow \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 1$ và $\alpha = \beta$.

Khi đó điều kiện $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$.

trở thành $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = 60^\circ$.

Từ đó ta có $\alpha = \beta = 60^\circ$.

Vậy $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{3}{2}$ chỉ khi tam giác là đều.

Bài toán 24. Chứng tỏ rằng với mọi góc α ta luôn có bất đẳng thức:

$$-\frac{3\sqrt{3}}{8} \leq \cos 2\alpha \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Giải: *Cách 1.* Ta tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(\alpha) = \cos 2\alpha \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$$

$$f'(\alpha) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin\left(3\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f'(\alpha) = -2\left[3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{4}\right) +\right.$$

$$\left. + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin\left(3\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

$f'(\alpha)$ triệt tiêu tại những giá trị:

$$\alpha_k = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \text{ hoặc } \alpha'_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$* \text{ Với } \alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$$

$$f''(\alpha) = (-1)^{k+1} 6 \cos\left(\frac{\pi}{6} - k\frac{\pi}{3}\right),$$

$f(\alpha_k) < 0$, nếu $k = 3r$, r là số nguyên. Khi này α_k là điểm cực đại.

$$\text{Ta có } f(\alpha_{3r}) = f\left(\frac{\pi}{12} + r\pi\right) = \cos^3 \frac{\pi}{6} + \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

$f'(\alpha_k) > 0$, nếu $k = 3r + 1$. Khi này α_k là điểm cực tiểu.

$$\text{Ta có } f(\alpha_{3r+1}) = f\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + r\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

* Tại các điểm $\alpha_k = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}$ ở đó $k = 3r - 1$ và tại các điểm

$$\alpha'_k = -\frac{\pi}{4} + k\pi, f'(\alpha) \text{ không đổi dấu.}$$

Đó không phải là những điểm cực trị. Vậy giá trị lớn nhất của $f(\alpha)$ là $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ và giá trị nhỏ nhất của $f(\alpha)$ là $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Vậy với mọi α

$$-\frac{3\sqrt{3}}{8} \leq \cos 2\alpha \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

$$\text{Cách 2. Ta có } \cos 2\alpha \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)^3.$$

$$\text{Đặt } \cos \alpha - \sin \alpha = x, \cos \alpha + \sin \alpha = y.$$

Theo bất đẳng thức Côsi: (chú ý $x^2 + y^2 = 2$)

$$\sqrt[4]{\frac{1}{27}x^2y^6} \leq \frac{1}{4}(x^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{3}y^2) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } |xy^3| \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } -\frac{3\sqrt{3}}{8} \leq \cos 2\alpha \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

$$\text{Cách 3. Ta có } |\cos 2\alpha \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)|^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4}(\cos \alpha - \sin \alpha)^2(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = \\
 &= \frac{1}{4}(1-t)(1+t)^3.
 \end{aligned}$$

ở đây $t = 2\cos\alpha\sin\alpha$, $-1 \leq t \leq 1$.

Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$g(t) = \frac{1}{4}(1-t)(1+t)^3 \text{ với } t \in [-1, 1].$$

$$g'(t) = \frac{1}{2}(1+t)^2(1-2t).$$

$t = \frac{1}{2}$ là hoành độ điểm cực đại, với $g(\frac{1}{2}) = \frac{27}{64}$. Hàm số $g(t)$

đơn điệu tăng trong đoạn $[-1, \frac{1}{2}]$ và đơn điệu giảm trong đoạn

$[\frac{1}{2}, 1]$. Vậy $\frac{27}{64}$ là giá trị lớn nhất của $g(t)$ trong đoạn $[-1, 1]$.

Vậy với mọi α : $[\cos 2\alpha \cdot \cos^2(\frac{\pi}{4} - \alpha)]^2 \leq \frac{27}{64}$.

Suy ra: $-\frac{3\sqrt{3}}{8} \leq \cos 2\alpha \cdot \cos^2(\frac{\pi}{4} - \alpha) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

BÀI TẬP

1. Cho $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$. Chứng minh rằng

$$a) \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \leq \frac{1}{\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d}};$$

$$b) 1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{a+b+d} < 2;$$

$$c) 2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{a+b+d} < 3;$$

$$d) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{d}{a+b} + \frac{c}{d+a} \geq 2;$$

$$e) \sqrt{(a+b)(c+d)} + \sqrt{(a+c)(b+d)} + \sqrt{(a+d)(b+c)} \geq \\ \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da} + \sqrt{ac} + \sqrt{bd}.$$

2. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$. Chứng minh rằng

$$a) 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2);$$

$$b) \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$c) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2};$$

$$d) 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a);$$

$$e) \left(\frac{a^2}{cb} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \right) \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a}.$$

3. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}.$$

4. Cho $a > 0, b > 0$. Chứng minh rằng

$$a) \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b};$$

$$b) \sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt[3]{a^3 + b^3} \geq \sqrt[4]{a^4 + b^4};$$

$$c) 2(a^4 + b^4) \geq a^3b + ab^3 + 2a^2b^2;$$

$$d) 2(a^6 + b^6) \geq a^5b + a^4b^2 + a^2b^4 + ab^5;$$

$$e) \sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a \text{ (khi } a > b).$$

5. Cho $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq b, b \neq c, c \neq a$.

Chứng minh các bất đẳng thức:

$$a) (a+b+c)^2 > 3(bc+ca+ab);$$

$$b) (ab+bc+ca)^2 > 3abc(a+b+c);$$

$$c) 3(a^3 + b^3 + c^3) > ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) + 3abc;$$

d) $8(a^3 + b^3 + c^3) > 3(b+c)(c+a)(a+b)$;

e) $27abc < (a+b+c)^3 < 9(a^3 + b^3 + c^3)$.

6. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a-b)^2}{3a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

7. Cho $a > 0, b > 0, (\frac{1+ab}{a+b})^2 < 1$. Chứng minh rằng không thể đồng thời xảy ra:

$$a < 1, b < 1.$$

8. Cho $a > 0, b > 0$. Chứng minh rằng:

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3) \leq 4(a^6+b^6).$$

9. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$ab(a+b-2c) + bc(b+c-2a) + ac(a+c-2b) \geq 0.$$

10. Chứng minh rằng với mọi $x \geq 0$ ta đều có:

a) $2x^3 + 2x^2 + 1 > x$; b) $x^3 + 2x^2 - x + 1 > 0$;

c) $\frac{x+3}{\sqrt{x+2}} > 2$; d) $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 > 0$.

11. Cho $a > b > 0$. Chứng minh rằng:

$$(x - \sqrt{ab}) \left(\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}} \right) \geq 0.$$

12. Chứng minh rằng nếu a, b, c đôi một khác nhau, thì:

$$a^2(c-b) + b^2(a-c) + c^2(b-a) \neq 0.$$

13. Cho a, b thoả mãn các điều kiện:

$$0 < a < \sqrt[3]{b} < a+1. \text{ Chứng minh rằng:}$$

$$\frac{a(a^3+2b)}{2a^3+b} \leq \sqrt[3]{b} < \frac{(a+1)[(a+1)^3+2b]}{2(a+1)^3+b}.$$

14. Cho $a > 0, b > 0, c > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức:

$$a) \frac{3}{a+b+c} < \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a};$$

$$b) \frac{1+a+b+ab}{2+a+b} < \frac{1+a+b}{2};$$

$$c) 2\sqrt{ab} < ac + \frac{b}{c};$$

$$d) (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

15. Cho $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. ($a \neq 1$, $ab \neq 1$). Chứng minh rằng:

$$|1 + \log_a b| \cdot (1 + \log_{ab}^2 c) \geq 2 \log_a c.$$

16. Cho $a^3 > 36$; $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca.$$

17. Chứng minh rằng nếu $\cos x \geq 0$ thì

$$a) \cos x \geq \cos 2x; \quad b) \cos x \geq \cos 3x.$$

18. Chứng minh rằng với mọi a ta đều có

$$\sin a \sin 2a \sin 3a \neq 1.$$

19. Chứng minh các bất đẳng thức:

$$a) |\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z| \leq 1;$$

$$b) |\sin x \cos y \cos z + \cos x \sin y \sin z| \leq 1.$$

20. Cho $0 < b \leq c < a - 1$. Chứng minh rằng:

$$\log_a(a+b) < \log_{a-c} a.$$

21. Cho $a > 0$, $b > 0$; x, y tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a. 2^x + b.3^y + 1 \leq \sqrt{4^x + 9^y} + 1. \sqrt{a^2 + b^2} + 1.$$

22. Chứng minh rằng:

$$a) \log_3 \pi + \log_{\pi} 3 > 2;$$

$$b) \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_{4.5} \pi} < 2.$$

23. Cho α là góc nhọn, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$(a + \frac{b}{\sin \alpha})(b + \frac{a}{\cos \alpha}) \geq a^2 + b^2 + 2ab.$$

24. Cho α, β là những góc nhọn và $\alpha < \beta$. Chứng minh rằng
 $\alpha + \cos \alpha < \beta + \cos \beta$.

25. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $|\sin \alpha| < n |\sin \alpha|$, n - nguyên dương;

b) $\log_3(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$, n - nguyên dương;

c) $n^{\frac{1}{n}} > \sqrt[n]{n+1}$; $n \geq 2$, n - nguyên dương;

d) $\sqrt[n]{n} < \frac{2}{\sqrt[n]{n}} + 1$; e) $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

26. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$;

b) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2}$;

c) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$;

d) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$;

e) $\frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ

Chương II

I. a) Viết lại bất đẳng thức dưới dạng

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} \leq \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d};$$

hay

$$\frac{ab(c+d)+cd(a+b)}{(a+b)(c+d)} \leq \frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}.$$

hay

$[ab(c+d)+cd(a+b)](a+b+c+d) \leq (a+b)(b+d)(c+d)(a+c)$, hay

$$cd(a+b)^2 + ab(c+d)^2 \leq (a+b)(c+d)(bc+da).$$

Chuyển vế và khai triển ta được $0 \leq (bc-ad)^2$.

b) Ta có:

$$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}.$$

Tương tự, cũng có các bất đẳng thức khác. Cộng lại, ta được bất đẳng thức kép cần phải chứng minh.

c) Ta có:
$$\frac{a+b}{a+b+c+d} < \frac{a+b}{a+b+c} < \frac{a+b+d}{a+b+c+d}.$$

Tương tự, ta nhận được các bất đẳng thức khác. Cộng các vế tương ứng, ta suy ra kết quả cần chứng minh.

d) Đặt $b+c=u$; $c+d=v$; $a+b=z$; $d+a=t$, thì: $a+b+c+d=u+t=v+z$. Từ đó, ta tính được a, b, c, d theo u, v, z, t và áp dụng bất đẳng thức Côsi cho từng cặp ta được điều cần chứng minh.

e) Ta có

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}.$$

Tương tự, cũng có các bất đẳng thức khác. Cộng lại, ta được điều cần chứng minh.

2. a) Nhân các biểu thức vế phải, ta chuyển về bất đẳng thức

$$2(a^3+b^3+c^3) \geq a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2). \quad (1)$$

Mà

$$a^3+b^3 \geq ab^2+a^2b,$$

$$b^3+c^3 \geq bc^2+b^2c,$$

$$c^3+a^3 \geq c^2a+a^2c.$$

Cộng lại, ta được (1).

b) Ta viết bất đẳng thức dưới dạng

$$a^8+b^8+c^8 \geq a^2b^3c^3+b^2a^3c^3+c^2a^3b^3. \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned}a^8 + b^8 &\geq a^2b^6 + b^2a^6, \\b^8 + c^8 &\geq b^2c^6 + c^2b^6, \\c^8 + a^8 &\geq c^2a^6 + a^2c^6.\end{aligned}$$

Cộng lại, ta được

$$\begin{aligned}2(a^8 + b^8 + c^8) &\geq a^2(b^6 + c^6) + b^2(a^6 + c^6) + c^2(a^6 + b^6) \geq \\&\geq a^2 \cdot 2b^3c^3 + b^2 \cdot 2a^3c^3 + c^2 \cdot 2a^3b^3.\end{aligned}$$

Từ đó, suy ra (1).

c) Thêm vào hai vế 3 đơn vị, ta được

$$\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{a+c} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq \frac{3}{2} + 3.$$

hay

$$\begin{aligned}2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) &\geq 9, \\[(b+c) + (c+a) + (a+b)]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) &\geq 9.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$(b+c) + (c+a) + (a+b) \geq 3^3 \sqrt{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{(b+c)(c+a)(a+b)}}.$$

Nhân các vế tương ứng ta được điều cần chứng minh.

$$\begin{aligned}\text{d) Ta có } a^3 + b^3 &\geq a^2b + ab^2, \\b^3 + c^3 &\geq b^2c + bc^2, \\c^3 + a^3 &\geq c^2a + ac^2.\end{aligned}$$

Cộng lại, ta được bất đẳng thức cần chứng minh.

e) Quy đồng mẫu số, ta được:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2c + b^2a + c^2b + c^2a + b^2c + a^2b.$$

3. Bình phương hai vế, ta được

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq (a+c)^2 + (b+d)^2,$$

$$\text{hay } \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd$$

Đây chính là bất đẳng thức Bunhiacôpski.

4. a) Chuyển vế, đặt thừa số chung, ta được

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a - b)}{\sqrt{ab}} \geq 0$$

c) Ta có: $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$.

$$a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2.$$

Cộng lại ta được điều cần chứng minh.

d) Ta có
$$\begin{cases} a^6 + b^6 \geq a^5b + ab^5, \\ a^6 + b^6 \geq a^2b^4 + a^4b^2. \end{cases}$$

Cộng lại ta được điều cần chứng minh.

e) Bình phương hai vế và sử dụng giả thiết $a > b$, ta được ngay kết quả cần chứng minh.

5. a), b) Khai triển và giản ước các số hạng, ta được điều cần chứng minh.

c) Áp dụng kết quả bài tập 2, d) và áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được: $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$. $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Cộng các bất đẳng thức này, ta được bất đẳng thức phải chứng minh.

d) Sử dụng đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$, ta có thể viết bất đẳng thức đã cho dưới dạng:

$$8(a+b+c)^3 > 27(a+b)(b+c)(c+a),$$

hay:

$$\frac{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}}{3} > \frac{a+b}{2} \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c+a}{2}.$$

Đây chính là bất đẳng thức Côsi cho ba số dương không đồng thời bằng nhau.

3) Bất đẳng thức bên trái là bất đẳng thức Côsi. Bất đẳng thức bên phải chính là bất đẳng thức ta vừa chứng minh ở câu d).

7. Sử dụng phương pháp phản chứng.

8. Khai triển vế phải, ta được:

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3) \leq 4(a^2+b^2)(a^4+b^4-a^2b^2),$$

$$\text{hay } (a+b)(a^3+b^3) \leq 4(a^4+b^4-a^2b^2),$$

$$\text{hay } ab^3 + a^3b + 4a^2b^2 \leq 3(a^4 + b^4). \quad (1)$$

$$\text{Mà } \begin{cases} 4a^2b^2 \leq 2a^4 + 2b^4, \\ ab^3 + a^3b \leq a^4 + b^4. \end{cases}$$

Cộng lại, ta được bất đẳng thức (1).

9. Viết lại đẳng thức đã cho dưới dạng:

$$(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc. (*)$$

Mà $a + b + c \leq 3\sqrt[3]{abc},$

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2},$$

Nhân các vế tương đương ta được (*)

10. a) Ta có $x^2 + 1 \geq 2x \geq x$. Vậy vế trái lớn hơn vế phải.

b) Tương tự như câu a).

c) Viết lại bất đẳng thức dưới dạng:

$$\sqrt{x+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}} > 2$$

Ta được bất đẳng thức Côsi cho hai số dương khác nhau.

d) Ta có $x^4 + 1 \geq 2x^2,$

$$x^3 + x \geq 2x^2.$$

Cộng lại ta được điều cần chứng minh.

11. Xét hai trường hợp $x \geq \sqrt{ab}$ và $x < \sqrt{ab}$.

12. Dùng phương pháp phản chứng.

13. Dùng đạo hàm. Xét hàm số: $f(x) = \frac{x(x^3 + 2b)}{2x^3 + b}.$

Ta được $f(a) < f(\sqrt[3]{b}) \leq f(a+1).$

14. a) Ta có:

$$\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{a+b},$$

$$\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{b+c},$$

$$\frac{1}{a+b+c} < \frac{1}{c+a}.$$

Cộng các vế tương ứng, ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

b) Nhân chéo, ta được:

$$2(1+a+b) + 2ab \leq (1+a+b)^3 + 1 + a + b,$$

hay: $1 + a + b + 2ab \leq (1 + a + b)^2,$

hay: $1 + a + b + 2ab \leq 1 + a + b + (1 + a + b)(a + b),$

hay: $2ab \leq (1 + a + b)(a + b). \quad (1)$

Mà $2ab \leq 4ab \leq (a + b)^2$, nên (1) luôn luôn đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh

c) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương.

15. Ta có $|1 + \log_a b| = |\log_a a + \log_a b| = |\log_a(ab)|.$

Mà $1 + \log^2_{bc} \geq 2|\log_{abc}|$ (bất đẳng thức Côsi).

Do vậy:

$$|1 + \log_a b| (1 + \log^2_{abc}) \geq 2 |\log_a(ab) \cdot \log_{abc}| = \\ = 2 |\log_a c| \geq 2 \log_a c.$$

16. Theo giả thiết thì $a > 0$ và $bc = \frac{1}{a}$. Vậy có thể viết bất đẳng thức

đã cho dưới dạng:

$$\frac{a^2}{3} + (b+c)^2 - 2bc > a(b+c) + bc,$$

$$\text{hay } (b+c)^2 - a(b+c) + \frac{a^2}{3} - \frac{3}{a} > 0.$$

Tiếp theo, áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

17. Phân tích ra thừa số để xét dấu.

18. Dùng phương pháp phản chứng.

19. a), b) Dùng bất đẳng thức Bunhiacôski.

20. Dùng công thức đảo cơ số.

21. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôski.

25, 26. Sử dụng phương pháp quy nạp toán học.

Chương III

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

§1. Ứng dụng bất đẳng thức để tìm các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = x + \sqrt{2 - x^2}.$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôski, ta được

$$y^2 = (x + \sqrt{2 - x^2})^2 \leq (1^2 + 1^2)(x^2 + 2 - x^2) = 4;$$

do vậy $-2 \leq y \leq 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số (ta ký hiệu maxy) bằng:

$$\text{maxy} = 2, \text{ đạt được khi } \frac{x}{1} = \frac{\sqrt{2 - x^2}}{1}, \text{ hay } x = 1.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = |x|\sqrt{1-x^2}.$$

Giải. áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm $|x|$ và $\sqrt{1-x^2}$ ta được

$$|x|\sqrt{1-x^2} = \sqrt{x^2(1-x^2)} \leq \frac{x^2 + 1 - x^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x^2 = 1 - x^2$, hay $x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $\max y = 1/2$.

Ví dụ 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = |x+2| + |x+1| + |2x-5|.$$

Giải: Ta viết lại hàm số đã cho dưới dạng:

$$y = |x+2| + |x+1| + |5-2x|.$$

Áp dụng bất đẳng thức $|a+b+c| \leq |a| + |b| + |c|$, ta được $y \geq |x+2| + |x+1| + |5-2x| = 8$, dấu bằng đạt được, chẳng hạn, khi $x = 0$. Vậy $\min y = 8$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}, \text{ trong khoảng } 0 < x < 1.$$

Giải. Ta viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = 2\frac{x}{1-x} + \frac{1-x}{x} + 3$$

Do $\frac{x}{1-x} > 0$, nên có thể áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số $2\frac{x}{1-x}$ và $\frac{1-x}{x}$ ta được:

$$2\frac{x}{1-x} + \frac{1-x}{x} + 3 \geq 2\sqrt{2} + 3;$$

dấu bằng đạt được khi $2\frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{x}$, hay $(\frac{1-x}{x})^2 = 2$; giải phương

trình này ta được $= \frac{1}{1 \pm \sqrt{2}}$

(Giá trị $\frac{1}{1 - \sqrt{2}}$ bị loại).

Vậy miny $= 2\sqrt{2} + 3$.

Ví dụ 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 2x + \frac{1}{x^2}, \text{ khi } x > 0.$$

Giải: Viết lại hàm số đã cho dưới dạng

$$y = x + x + \frac{1}{x^2} + 1 - 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta được

$$\begin{aligned} x + 1 &\geq 2\sqrt{x}, \\ x + \frac{1}{x^2} &\geq 2\sqrt{\frac{1}{x}}, \\ 2\sqrt{x} + 2\sqrt{\frac{1}{x}} &\geq 4. \end{aligned}$$

Cộng các vế tương ứng của các bất đẳng thức này, ta được

$$2x + \frac{1}{x^2} + 1 \geq 4.$$

Do vậy $y \geq 4 - 1 = 3$; dấu bằng đạt được khi $x = 1$.

Vậy miny $= 3$.

Chú ý. Cũng có thể áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm, ta được:

$$y = 2x + \frac{1}{x^2} = x + x + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt{x \cdot x \cdot \frac{1}{x^2}} = 3.$$

Ví dụ 6. Tìm các giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{x + 2(1 + \sqrt{x + 1})} + \sqrt{x + 2(1 - \sqrt{x + 1})}.$$

Giải: Biến đổi các số hạng của hàm số ta được

$$\sqrt{x + 2(1 + \sqrt{x + 1})} = \sqrt{(x + 1) + 1 + 2\sqrt{x + 1}} =$$

$$= \sqrt{(1 + \sqrt{x+1})^2} = 1 + \sqrt{x+1};$$

$$\sqrt{x+2(1-\sqrt{x+1})} = \sqrt{(x+1)+1-2\sqrt{x+1}} =$$

$$= \sqrt{(1-\sqrt{x+1})^2} = |1-\sqrt{x+1}|.$$

$$\text{Vậy: } y = 1 + \sqrt{x+1} + |1-\sqrt{x+1}|$$

Sử dụng bất đẳng thức $|a| \geq a$, (có dấu bằng khi $a \geq 0$), ta được:

$$y = 1 + \sqrt{x+1} + |1-\sqrt{x+1}| \geq 1 + \sqrt{x+1} + 1 - \sqrt{x+1} = 2.$$

Do vậy min $y = 2$, đạt được khi $1 - \sqrt{x+1} \geq 0$ hay $-1 \leq x \leq 0$, (lưu ý điều kiện để hàm số xác định là $x \geq -1$).

Ví dụ 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{5-3x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Giải: Vì hàm số xác định khi $-1 < x < 1$, nên $y > 0$. Ta có

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{(5-3x)^2}{1-x^2} = \frac{25-30x+9x^2}{1-x^2} = \\ &= \frac{9-30x+25x^2+16-16x^2}{1-x^2} = \frac{9-30x+25x^2}{1-x^2} + 16 = \\ &= \frac{(3-5x)^2}{1-x^2} + 16 \geq 16, \text{ suy ra } y \geq 4. \end{aligned}$$

Vậy min $y = 4$, đạt được khi $3 - 5x = 0$, hay $x = 3/5$.

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}.$$

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, (lưu ý điều kiện để tẩn có nghĩa: $x \geq 1$), cho hai số không âm 1 và $x-1$ ta được

$$\sqrt{1 \cdot (x-1)} \leq \frac{1+x-1}{2} = \frac{x}{2}.$$

$$\text{Vậy } y \leq \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\max y = \frac{1}{2}$, đạt được khi $x = 2$.

Ví dụ 9. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$f(x, y, z) = \frac{yz\sqrt{x-1} + xz\sqrt{y-2} + xy\sqrt{z-3}}{xyz}$$

Giải: Điều kiện để biểu thức có nghĩa:

$$x \geq 1; y \geq 2; z \geq 3$$

Viết lại biểu thức dưới dạng

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{y} + \frac{\sqrt{z-3}}{z}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta được

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{1 \cdot (x-1)} \leq \frac{1+x-1}{2} = \frac{x}{2}$$

$$\sqrt{y-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 \cdot (y-2)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2+y-2}{2} = \frac{y}{2\sqrt{2}};$$

$$\sqrt{z-3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3 \cdot (z-3)} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3+z-3}{2} = \frac{y}{2\sqrt{3}}.$$

Do vậy

$$f(x, y, z) \leq \frac{x}{2x} + \frac{y}{2\sqrt{y}} + \frac{z}{2\sqrt{3} \cdot z} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Suy ra:

$$\max f(x, y, z) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right);$$

đạt được khi $x = 2; y = 4; z = 6$.

Ví dụ 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$f(x, y) = \frac{(x + y)^3}{xy^2}, \text{ khi } x > 0, y > 0.$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$x + y = x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \geq 3\sqrt{\frac{xy^2}{4}}.$$

Do vậy: $(x + y)^3 \geq \frac{27}{4}xy^2$ và $f(x, y) \geq \frac{27}{4}$, dấu bằng đạt được

khi $y = 2x$. Vậy $\min f(x, y) = \frac{27}{4}$.

Ví dụ 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = 3^{x+1} + 3^{2-x}.$$

Giải: Do $3^{x+1} > 0$ và $3^{2-x} > 0$, ta có thể áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương:

$$3^{x+1} + 3^{2-x} \geq 2\sqrt{3^{x+1} \cdot 3^{2-x}} = 2\sqrt{27}.$$

Vậy $\min y = 2\sqrt{27}$, đạt được khi $3^{x+1} = 3^{2-x}$, hay $x = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = |\log_{x^2+1}(-x^2 + 3) + \log_{-x^2+3}(x^2 + 1)|.$$

Giải: Hàm số xác định trong khoảng

$$3 - x^2 > 0; 3 - x^2 \neq 1, \text{ hay } -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}; x \neq \pm\sqrt{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, ta được:

$$\begin{aligned} & |\log_{x^2+1}(3 - x^2)| + |\log_{3-x^2}(x^2 + 1)| \geq \\ & \geq 2\sqrt{|\log_{x^2+1}(3 - x^2) \log_{3-x^2}(x^2 + 1)|} = 2 \end{aligned}$$

Mặt khác, do $|\log_{x^2+1}(3 - x^2)|$ và $|\log_{3-x^2}(x^2 + 1)|$ là hai số cùng dấu, nên:

$$y = |\log_{x^2+1}(-x^2 + 3)| + |\log_{3-x^2}(x^2 + 1)| \geq 2.$$

Dấu bằng đạt được khi $x = \pm 1$. Vậy $\min y = 2$.

Ví dụ 13. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$f(x,y) = |\sin x| \cos y + |\cos x| \sin y.$$

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta được

$$\begin{aligned} (|\sin x| \cos y + |\cos x| \sin y)^2 &\leq \\ &\leq (\sin^2 x + \cos^2 x)(\cos^2 y + \sin^2 y) = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } -1 \leq |\sin x| \cos y + |\cos x| \sin y \leq 1.$$

$$\text{Vậy: } \max f(x,y) = 1, \text{ đạt được khi } \begin{cases} \cos y = |\sin x|, \\ \sin y = |\cos x|. \end{cases}$$

$$\text{và } \min f(x,y) = -1, \text{ đạt được khi } \begin{cases} \cos y = -|\sin x|, \\ \sin y = -|\cos x|. \end{cases}$$

Ví dụ 14. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \sin x + 4\cos x.$$

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta được

$$(\sin x + 4\cos x)^2 \leq (1^2 + 4^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 17.$$

Suy ra

$$-\sqrt{17} \leq \sin x + 4\cos x \leq \sqrt{17}.$$

Vậy $\max f(x) = \sqrt{17}$, đạt được chẳng hạn khi

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos x = \frac{4}{\sqrt{17}};$$

và $\min f(x) = -\sqrt{17}$ đạt được chẳng hạn khi

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos x = -\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

Ví dụ 15. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$y = \sin^3 x - \sin^6 x.$$

Giải: Theo bất đẳng thức $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, (xem ví dụ 6, ch.II), ta có

$$y = \sin^3 x (1 - \sin^3 x) \leq \left(\frac{\sin^3 x + 1 - \sin^3 x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Do vậy $\max y = \frac{1}{4}$, đạt được khi $1 - \sin^3 x = \sin^3 x$, hay

$$\sin x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

§2. Một số bài toán về cực trị có điều kiện

Các bài toán về cực trị có điều kiện rất đa dạng và thuộc vào loại những bài toán khó. Việc giải các bài toán này đòi hỏi kết hợp thành thạo nhiều khâu biến đổi trung gian bằng các phương pháp khác nhau. Ở đây ta chỉ xét một số dạng đặc biệt, có thể suy ra trực tiếp từ những bất đẳng thức cơ bản quen biết, như các bất đẳng thức Côsi và bất đẳng thức Bunhiacôpski.

Ví dụ 16. Xét các số x, y thỏa mãn các điều kiện $x + y = 1$; $x \geq 0$; $y \geq 0$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = x^2 + y^2$$

Giải: Từ các điều kiện suy ra $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Do vậy ta có $x^2 \leq x$ và $y^2 \leq y$.

Cộng các bất đẳng thức này ta được.

$x^2 + y^2 \leq 1$. Dấu bằng có khi $x = 1, y = 0$ hoặc

$$x = 0, y = 1.$$

Vậy $\max A = 1$.

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta được

$$1 = (x + y)^2 = (1 \cdot x + 1 \cdot y)^2 \leq (1^2 + 1^2)(x^2 + y^2).$$

Do vậy: $A \geq \frac{1}{2}$. Dấu bằng đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy $\min A = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 17. Xét các số x, y thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = xy$.

Giải: Ta có:

$$xy \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Vậy $\max B = \frac{1}{4}$, đạt được khi $x = y = \frac{1}{2}$

Ví dụ 18. Xét các số x, y thỏa mãn các điều kiện $x + y = 1$; $y \geq 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $C = xy^2$

Giải: 1) nếu $x \leq 0$, thì $C = x.y^2 \leq 0$.

2) Xét $x > 0$, khi đó, áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được

$$1 = x + y = x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{xy^2}{4}}, \text{ hay } xy^2 \leq \frac{4}{27}.$$

Vậy $\max C = \frac{4}{27}$, đạt được khi $x = \frac{1}{3}; y = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 19. Xét các số x, y, z thỏa mãn các điều kiện:

$$x > 0; y > 0; z > 0; x + y + z = 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{x+y}{xyz}$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$1 = x + y + z = (x + y) + z \geq 2\sqrt{(x+y)z}, \text{ hay } 1 \geq 4(x+y).z$$

$$\text{hay } x + y \geq 4(x+y)^2.z$$

Mặt khác $(x+y)^2 \geq 4xy$, nên từ (1) ta suy ra

$$x + y \geq 16xyz \text{ hay } \frac{x+y}{xyz} \geq 16.$$

Do vậy $\min M = 16$, đạt được khi $x = y = \frac{1}{4}; z = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 20. Xét các số x, y, z thỏa mãn điều kiện $x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; x + y + z = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = xy + yz + zx.$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy, \frac{y^2 + z^2}{2} \geq yz, \frac{z^2 + x^2}{2} \geq zx.$$

Cộng các bất đẳng thức này, ta được

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx. \quad (1)$$

Mặt khác,

$$1 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx).$$

Kết hợp với (1), suy ra:

$$1 \geq 3(xy + yz + zx),$$

hay $xy + yz + zx \leq \frac{1}{3}$. Vậy $\text{Max} M = \frac{1}{3}$ đạt được khi

$$x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 21. Xét các số x, y, z, t thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 = 1; z^2 + t^2 = 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$M = xz + yt.$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta được

$$(xz + yt)^2 \leq (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = 1.$$

Do đó $-1 \leq xz + yt \leq 1$.

Vậy $\text{max} M = 1$, đạt được khi $x = z = y = t = \frac{\pm \sqrt{2}}{2}$;

$\text{min} M = -1$ khi $x = y = -z = -t = \frac{\pm \sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 22. Xét các số x, y thỏa mãn điều kiện $2x^2 + 3y^2 \leq 5$

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

$$M = 2x + 3y.$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta được

$$(2x + 3y)^2 = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2x} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3y})^2 \leq (2 + 3)(2x^2 + 3y^2) \leq 25.$$

Do vậy, $-5 \leq 2x + 3y \leq 5$.

Suy ra $\max M = 5$, đạt được khi $x = y = 1$;

$\min M = -5$, đạt được khi $x = y = -1$.

Ví dụ 23. Các số x, y, z thoả mãn các điều kiện

$$x + y + z = xyz; \quad x > 0, y > 0, z > 0.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = xyz.$$

Giải. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta được

$$A = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{A}.$$

$$\text{Do vậy: } A^3 \geq 27A.$$

$$\text{Do } A > 0, \text{ nên suy ra } A^2 \geq 27, \text{ hay } A \geq 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } \min A = 3\sqrt{3} \text{ đạt được khi } x = y = z = \sqrt{3}.$$

Ví dụ 24. Các số x, y, z thoả mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$M = x^4 + y^4 + z^4.$$

Giải: Áp dụng đẳng thức Bunhiacôpski, ta được

$$\begin{aligned} 1 &= (xy + yz + zx)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2 + x^2) = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^2, \text{ hay: } 1 \leq x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta được

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(x^4 + y^4 + z^4). \text{ Kết hợp với (1) ta được}$$

$$1 \leq 3(x^4 + y^4 + z^4) \text{ hay } 1/3 \leq x^4 + y^4 + z^4.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } x = y = z = \frac{\pm\sqrt{3}}{3} \text{ Vậy}$$

$$\min M = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 25. Xét các số x, y, z thoả mãn điều kiện

$$|x| + |y| + |z| = 5. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức}$$

$$M = |x - 1| + |y - 1| + |z - 1|.$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức $|a - b| \geq |a| - |b|$, ta có

$$|x - 1| \geq |x| - 1,$$

$$|y - 1| \geq |y| - 1,$$

$$|z - 1| \geq |z| - 1.$$

Cộng các bất đẳng thức này ta được:

$|x - 1| + |y - 1| + |z - 1| \geq |x| + |y| + |z| - 3 = 2$, dấu bằng đạt được, chẳng hạn khi $x = y = z = 5/3$. Do vậy, $\min M = 2$.

Ví dụ 26. Các số x, y thoả mãn điều kiện $x + y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 2^x + 2^y.$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương 2^x và 2^y , ta được: $2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^y}$,

hay $2^x + 2^y \geq 2\sqrt{2^{x+y}} = 2\sqrt{2^2} = 4$; dấu bằng đạt được khi $2^x = 2^y$, hay $x = y = 1$.

Vậy $\min A = 4$.

Ví dụ 27. α, β, γ , là ba góc tùy ý thoả mãn các điều kiện

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2};$$

$\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma.$$

Giải: Theo giả thiết thì $\operatorname{tg} \alpha > 0$, $\operatorname{tg} \beta > 0$, $\operatorname{tg} \gamma > 0$ và $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(\pi - \gamma)$,

$$\text{hay} \quad \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = -\operatorname{tg} \gamma.$$

Suy ra: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$.

Vậy áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương, ta được:

$$A = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma \geq 3\sqrt[3]{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} = 3\sqrt[3]{A}.$$

Do vậy $A \geq 3\sqrt[3]{A}$, hay $A \geq 3\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$.

Suy ra: $\min A = 3\sqrt{3}$.

Ví dụ 28. Các góc α, β, γ thoả mãn các điều kiện $\alpha \geq 0; \beta \geq 0; \gamma \geq 0; \alpha + \beta + \gamma = \pi/2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 1} + \sqrt{\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha + 1}.$$

Giải: Giả sử $0 < \gamma < \pi/2$, khi đó $\operatorname{tg}\alpha \geq 0; \operatorname{tg}\beta \geq 0; \operatorname{tg}\gamma \geq 0$ và $\alpha + \beta \neq \pi/2$; nên ta có $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(\pi/2 - \gamma)$, hay $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \cot\gamma$, hay:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma},$$

hay: $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha = 1. \quad (1)$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski, thì:

$$\begin{aligned} M^2 &= (1 \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 1} + 1 \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 1} + 1 \cdot \sqrt{\operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha + 1})^2 \leq \\ &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + 1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 1 + \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\alpha + 1). \end{aligned}$$

Theo (1) thì $M^2 \leq 3.4$ hay $M \leq 2\sqrt{3}$. Còn khi $\gamma = 0$ thì dễ thấy $M = 2 + \sqrt{2} < 2\sqrt{3}$.

Vậy $\max M = 2\sqrt{3}$, đạt được khi $\alpha = \beta = \gamma = \pi/6$.

§3. Bài toán với các phương pháp giải khác nhau

Bài toán 1. Tìm giá trị bé nhất và lớn nhất của hàm số

$$y = \frac{x^2}{1+x^4}.$$

Giải: Cách 1. Vì $y \geq 0$, nên $y_{\min} = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.
Vì $x^4 + 1 \geq 2x^2$, có dấu bằng $\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Từ đó: $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$. Vậy $y \leq y_{\max}$ đạt được khi $x = \pm 1$.

Vậy $y_{\min} = 0$ khi $x = 0$; $y_{\max} = \frac{1}{2}$ khi $x = \pm 1$.

Cách 2. Để tính $y_{\max}$ ta có thể biến đổi

$$y = \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + x^2}. \text{ Do } x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2$$

$$\text{nên } y = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow y_{\max} = \frac{1}{2} \text{ khi } x^2 = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 1$$

Cách 3. Dùng phương pháp tam thức bậc 2. Đặt $t = x^2$.

Từ phương trình $y = \frac{t}{1+t^2}$ với y là tham số, ta có

$$y(1+t^2) = t \Leftrightarrow yt^2 - t + y = 0. \quad (1)$$

Để xác định $y_{\min}$, $y_{\max}$ của hàm số đã cho ta cần xác định t là nghiệm của phương trình (1).

Xét $\Delta = 1 - 4y^2$. Điều kiện (1) có nghiệm: $\Delta \geq 0 \Rightarrow$

$$1 - 4y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Do $t = x^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$. Nên từ (2) ta có điều kiện là $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$.

Vậy: $y_{\min} = 0$ khi $t = 0$ tức là $x = 0$;

$$y_{\max} = \frac{1}{2} \text{ khi } t = 1 \text{ tức là } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bài toán 2. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $y = 3^{x-1} + 3^{-x-1}$.

Giải: **Cách 1.** áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$3^{x-1} + 3^{-x-1} \geq 2\sqrt{3^{x-1} \cdot 3^{-x-1}} = 2\sqrt{3^{-2}} = \frac{2}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi:

$$3^{x-1} = 3^{x-1} \Leftrightarrow x - 1 = -x - 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy $y_{\min} = \frac{2}{3}$ khi $x = 0$.

Hàm số không có giá trị lớn nhất vì:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{x-1} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x-1} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$$

Cách 2. Từ $y = 3^{x-1} + 3^{-x-1} \Rightarrow 3y = 3^x + 3^{-x}$, hay

$$3y = 3^x + \frac{1}{3^x} \geq 2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} = 2.$$

Do đó $y \geq \frac{2}{3} \forall x$. Dấu bằng xảy ra khi $3^x = 3^{-x}$ hay $x = 0$.

Vậy: $y_{\min} = \frac{2}{3}$, khi $x = 0$.

Cách 3. Từ $y = 3^{x-1} + 3^{-x-1} = \frac{1}{3}(3^x + 3^{-x})$.

Xét $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ là hàm số chẵn. Do đó chỉ cần xét $f(x)$ với $x \geq 0$ là đủ.

$$\text{Đặt } g(t) = t + \frac{1}{t}, g'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$$

Khi $t = 3^x$ với $x \geq 0 \Rightarrow t \geq 1$.

$$\text{Vậy } g'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} \geq 0, \forall t.$$

Hay hàm số $g(t)$ đồng biến khi $t \geq 1$. Do đó $f(x)$ đồng biến khi $x \geq 0$. Vậy: $y \geq y(0) = \frac{2}{3}$.

Kết luận: $y_{\min} = \frac{2}{3}$ khi $x = 0$.

Cách 4. Xét phương trình siêu việt

$$y = 3^{x-1} + 3^{-x-1} \Leftrightarrow 3y = 3^x + \frac{1}{3^x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} - 3y \cdot 3^x + 1 = 0.$$

Đặt $t = 3^x$ ta được phương trình

$$t^2 - 3yt + 1 = 0;$$

$\Delta = 9y^2 - 4$. Điều kiện để phương trình có nghiệm là

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq \frac{4}{9}.$$

Do $y = 3^{x-1} + 3^{-x-1} > 0$ nên được $y \geq \frac{2}{3}$.

Vậy $y_{\min} = \frac{2}{3}$ khi $x = 0$.

Bài toán 3. Cho $2x + 5y = 7$. Hãy tìm giá trị bé nhất của các biểu thức

a) $x^2 + y^2$; b) $2x^2 + 5y^2$.

Giải: Cách 1. a) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôski

$$a) 49 = (2x + 5y)^2 \leq (2^2 + 5^2) \cdot (x^2 + y^2) \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 \geq \frac{49}{29}.$$

Vậy giá trị bé nhất của $x^2 + y^2$ là $\frac{49}{29}$. Dấu bằng xảy ra khi

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{2x}{4} = \frac{5y}{25} = \frac{2x+5y}{29} = \frac{7}{29} \Rightarrow x = \frac{14}{29} \text{ và } y = \frac{35}{29}.$$

$$b) 49 = (2x + 5y)^2 \leq [(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2][(\sqrt{2}x)^2 + (\sqrt{5}y)^2],$$

$$\text{hay } 49 \leq 7(2x^2 + 5y^2).$$

$$\text{Vậy: } 2x^2 + 5y^2 \geq 7.$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}y}{\sqrt{5}} = x = y \text{ tức là } x = y = 1.$$

Cách 2. a) Vì $2x + 5y = 7$, nên $y = \frac{7-2x}{5}$.

Xét $x^2 + y^2$ như hàm của x :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{7-2x}{5}\right)^2 = \\ &= \frac{29}{25}x^2 - \frac{28}{25}x + \frac{49}{25}. \end{aligned}$$

Tam thức bậc 2 $f(x)$ có hệ số $a = \frac{29}{25} > 0$, nên đạt min.

Khi $x = -\frac{b}{2a}$, với giá trị $f_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$;

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{28}{25}; \frac{58}{25} = \frac{14}{29}, \text{ và } y = \frac{7-2x}{5} = \frac{35}{29};$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{28}{25}\right)^2 - 4 \cdot \frac{29}{25} \cdot \frac{49}{25} = -\frac{4900}{25},$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{49}{25}.$$

Vậy $x^2 + y^2 \geq \frac{49}{25}$, có dấu bằng khi $x = \frac{14}{29}, y = \frac{35}{29}$.

b) Tương tự xét

$$g(x) = 2x^2 + 5 \cdot \frac{(7-2x)^2}{25} = \frac{14}{5}x^2 - \frac{28}{5}x + \frac{49}{25}.$$

Ta có $g_{\min} = -\frac{\Delta}{4a}$ khi

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{28}{5}; \frac{28}{5} = 1, \text{ và } y = 1.$$

$$\Delta = \left(\frac{28}{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{14}{5} \cdot \frac{49}{5} = -\frac{392}{5} \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = \frac{392}{5} \cdot \frac{5}{6} = 7$$

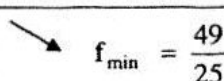
Vậy $g(x) \geq 7$, dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$.

Cách 3. Sau khi biến đổi

$$f(x) = x^2 + y^2 = \frac{29}{25}x^2 - \frac{28}{25}x + \frac{49}{25}$$

$$\text{xét } f'(x) = \frac{58}{25}x - \frac{28}{25}; f'(x) = 0 \text{ có nghiệm } x = \frac{14}{29}.$$

Bảng xét dấu:

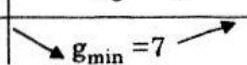
x	$-\infty$	$\frac{14}{29}$	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	 $f_{\min} = \frac{49}{25}$		

$$\text{Vậy: } f\left(\frac{14}{29}\right) = f_{\min} = \frac{49}{25}.$$

$$\text{Tương tự: } g(x) = \frac{14}{5}x^2 - \frac{28}{5}x + \frac{29}{5}.$$

$$g'(x) = \frac{28}{5}(x-1).$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
g'(x)	-	0	+
g(x)	 $g_{\min} = 7$		

$$\text{Vậy: } g_{\min} = g(1) = 7.$$

Cách 4. Làm hoàn toàn tương tự như trên bằng cách thay

$$x = \frac{7-5y}{2}.$$

Cách 5. áp dụng phương pháp tam thức bậc 2 lần lượt cho các phương trình

$$1) \frac{28}{5}x^2 - \frac{28}{5}x + \frac{49}{25} - t = 0,$$

$$2) \frac{14}{5}x^2 - \frac{28}{5}x + \frac{49}{25} - t = 0.$$

Lý luận để thấy $\Delta \geq 0$ rồi từ đó biện luận theo tham số t .

Bài toán 4. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số $y = (1-x)^n + (1+x)^n$ với $|x| \leq 1$, n là số tự nhiên

Giải: **Cách 1.** Xét $y' = n(1+x)^{n-1} - n(1-x)^{n-1} =$
 $= n[(1+x)^{n-1} - (1-x)^{n-1}].$

Khi $y' = 0$ ta có $(1+x)^{n-1} = (1-x)^{n-1}$; vì $|x| \leq 1$, nên $1+x$, $1-x$ là 2 số không âm, suy ra:

$$1+x = 1-x \text{ hay } x = 0.$$

Có bảng xét dấu sau:

x	-1	0	1
y'	-	0	+
y	2^n	2	2^n

Qua bảng xét dấu, ta có:

$$y_{\min} = y(0) = 2$$

$$y_{\max} = y(-1) = y(1) = 2^n.$$

Cách 2. Từ bất đẳng thức

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n, \forall a, b > 0,$$

ta có đánh giá sau:

$$y = (1-x)^n + (1+x)^n \geq 2\left[\frac{(1-x) + (1+x)}{2}\right]^n = 2$$

Vậy $y \geq 2$, dấu bằng có khi $x = 0$.

$$\text{Do } |x| < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 1+x \leq 2 \\ 0 \leq 1-x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{1+x}{2} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{1-x}{2} \leq 1 \end{cases}$$

nên với n – số tự nhiên, ta có:

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n \leq \frac{1+x}{2},$$

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^n \leq \frac{1-x}{2}.$$

Cộng vế với vế ta được: $\frac{y}{2^n} \leq 1$ hay $y \leq 2^n$.

Vậy $2 \leq y \leq 2^n$, $\forall x: |x| \leq 1$;

$$y_{\min} = 2 \text{ khi } x = 0,$$

$$y_{\max} = 2^n \text{ khi } x = \pm 1.$$

Cách 3. Vì $|x| \leq 1$, hay $-1 \leq x \leq 1$, nên tồn tại góc $\alpha \in [0, \pi/2]$ sao cho $x = \cos 2\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } y &= (1 - \cos 2\alpha)^n + (1 + \cos 2\alpha)^n = \\ &= (2\sin^2 \alpha)^n + (2\cos^2 \alpha)^n = 2^n (\sin^{2n} \alpha + \cos^{2n} \alpha). \end{aligned}$$

Để tìm min, max của y ta tìm min, max của

$$y^* = \sin^{2n} \alpha + \cos^{2n} \alpha.$$

$$\text{Do } \sin^2 \alpha \leq 1, \cos^2 \alpha \leq 1 \Rightarrow$$

$$\sin^{2n} \alpha \leq \sin^2 \alpha,$$

$$\cos^{2n} \alpha \leq \cos^2 \alpha.$$

Cộng vế với vế ta có $y^* \leq 1$. Vậy $y_{\max} = 2^n$ khi $\sin^{2n} \alpha = \sin^2 \alpha = 1$ hoặc $\cos^{2n} \alpha = \cos^2 \alpha = 1$.

Theo bất đẳng thức Becnuli:

$$(1+x)\alpha \geq 1+\alpha x, |x| \leq 1, \alpha \geq 1$$

$$\text{ta có } (1-x)^n \geq 1-nx,$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Cộng vế với vế: $y \geq 2$, dấu bằng khi $x = 0$.

$$\text{Vậy } 2 \leq (1-x)^n + (1+x)^n \leq 2^n.$$

Bài toán 5. A-1987). Trong những nghiệm của hệ sau:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2 + t^2 = 16 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xt + yz \geq 12 & (3) \end{cases}$$

hãy tìm nghiệm để $x + z$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải: *Cách 1.* Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski

$$(xt + yz)^2 \leq (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = 9 \cdot 16 = 144.$$

Suy ra: $|xt + yz| \leq 12$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{x}{t} = \frac{y}{z} = k. \quad (4)$$

Do điều kiện (3) suy ra: $xt + yz = 12$

Từ điều kiện (4) suy ra:

$$k^2 = \frac{x^2}{t^2} = \frac{y^2}{z^2} = \frac{x^2 + y^2}{z^2 + t^2} = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow k = \pm \frac{3}{4} \text{ và từ (4) suy ra } xz = yt.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } x^2 + z^2 + y^2 + t^2 &= x^2 + 2xz + z^2 + y^2 - 2xz + t^2 = \\ &= (x + z)^2 + (y - t)^2 = 9 + 16 = 25. \end{aligned}$$

Suy ra: $(x + z)^2 \leq 25$ do $(y - t)^2 \geq 0$.

$$\text{Vậy: } \max(x + z) = 5 \text{ khi } \begin{cases} y = t; x = kt \\ k = \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$\text{giải ra được } x = \frac{9}{5}; z = \frac{16}{5}; y = \frac{12}{5}; t = \frac{12}{5}.$$

Kết luận. $x + z$ lớn nhất và bằng 5 khi $x = \frac{9}{5}; z = \frac{12}{5}$.

Cách 2. Từ (1) suy ra: $-3 \leq x, y \leq 3$

$$-4 \leq z, t \leq 4.$$

Suy ra: $\exists \alpha \in [0; 2\pi]: x = 3\cos\alpha; y = 3\sin\alpha.$

Tương tự: $\exists \beta \in [0; 2\pi]: z = 4\cos\beta; t = 4\sin\beta.$

Suy ra, từ điều kiện (3):

$$xt + yz = 12\sin\beta \cdot \cos\alpha + 12\sin\alpha \cdot \cos\beta = 12 \sin(\alpha + \beta) \geq 12, \\ \text{hay } \sin(\alpha + \beta) \geq 1. \text{ Vì } \sin(\alpha + \beta) \leq 1, \text{ nên } \sin(\alpha + \beta) = 1$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

(do điều kiện $\alpha, \beta \in [0; 2\pi]$. Vì $\alpha + \beta = \pi/2$ nên

$$x = 3\cos\alpha; \quad y = 3\sin\alpha,$$

$$z = 4\sin\alpha; \quad t = 4\cos\alpha,$$

$$\Rightarrow x + z = 3\cos\alpha + 4\sin\alpha = 5\left(\frac{3}{5}\cos\alpha + \frac{4}{5}\sin\alpha\right).$$

Đặt $\frac{3}{5} = \sin\varphi, \varphi$ là góc xác định thuộc $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} = \cos\varphi. \text{ Do đó:}$$

$$x + z = 5(\sin\varphi \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\varphi) = 5\sin(\varphi + \alpha).$$

Vậy: $x + z \leq 5.$

Dấu bằng có khi $\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2}$, hay $\varphi = \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\text{Khi đó: } x = 3\cos\alpha = 3\sin\varphi = \frac{9}{5},$$

$$z = 4\sin\alpha = 4\cos\varphi = \frac{16}{5}.$$

Bài toán 6. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = 4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}.$$

Giải: Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} \geq 2\sqrt{4} = 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi $4^{\sin^2 x} = 4^{\cos^2 x} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là 4.

Ta lại có:

$$4^{\sin^2 x} - 1 \geq 0, \quad (1)$$

$$4^{\cos^2 x} - 1 \geq 0. \quad (2)$$

Nhân (1) và (2) lại được:

$$(4^{\sin^2 x} - 1)(4^{\cos^2 x} - 1) \geq 0 \text{ hay là:}$$

$$4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} \leq 5.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sin x = 0$ hoặc $\cos x = 0$.

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5.

Cách 2. Ta có $y = 4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}$

$$= 4^{\sin^2 x} + 4^{1 - \sin^2 x}$$

$$= 4^{\sin^2 x} + \frac{4}{4^{\sin^2 x}} = \frac{(4^{\sin^2 x})^2 + 4}{4^{\sin^2 x}}$$

Đặt $t = 4^{\sin^2 x}$, ta có: $1 \leq t \leq 4$;

Xét hàm số $F(t) = \frac{t^2 + 4}{t}$ với $1 \leq t \leq 4$;

$F(t) = \frac{t^2 - 4}{t^2}$. Ta có bảng biến thiên:

t	1	2	4
F'	-	0	+
F	5	$F_{\min} = 4$	5

$$\begin{aligned}\text{Ta có} \quad F(1) &= F(4) = 5, \\ F(2) &= 4.\end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5 và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 4.

Bài toán 7. Giả sử $0 \leq a, b, c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = a + b + c - ab - bc - ca.$$

Giải: *Cách 1.* Ta có:

$$\begin{aligned}P &= (a - ab) + (b - bc) + (c - ca) = \\ &= a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a) \geq 0\end{aligned}$$

Dấu bằng có thể xảy ra chẳng hạn khi $a = b = c = 0$. Vậy, giá trị nhỏ nhất của P bằng 0.

$$\text{Ta có} \quad \begin{cases} 1 - a \geq 0 & (1) \\ 1 - b \geq 0 & (2) \\ 1 - c \geq 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 0$$

Khai triển ra ta được:

$$a + b + c - ab - bc - ca \leq 1 - abc \leq 1.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi: } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c \text{ tùy ý thuộc } [0, 1]. \end{cases}$$

Vậy, giá trị lớn nhất của P bằng 1.

Cách 2. Như cách 1, giá trị nhỏ nhất của P bằng 0. Để tìm giá trị lớn nhất của P ta dựng tam giác đều ABC với cạnh bằng 1.

(Bạn đọc tự vẽ hình).

Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy các điểm M, N, P với $AM = a; BN = b; CP = c$. Ta có:

$$S(\Delta AMP) + S(\Delta BNM) + S(\Delta CPN) \leq S(\Delta ABC).$$

Như vậy: $\frac{\sqrt{3}}{4}[a(1-c) + b(1-a) + c(1-b)] \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$

Từ đó: $a + b + c - ab - bc - ca \leq 1$.

Dấu bằng xảy ra khi M và N trùng với B còn P là điểm tùy ý trên AC.

Bài toán 8. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$.

Giải. Cách 1. Hàm số xác định khi

$|x| \leq 1$ và khi đó $y \geq 0$.

Ta có $y^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2}$.

Để thấy khi $-1 \leq x \leq 1$, thì $0 \leq 1 - x^2 \leq 1$

Từ đó $2 \leq y^2 \leq 4$.

Vì $y \geq 0$ nên: $\sqrt{2} \leq y \leq 2$.

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2 (đạt được khi $x = 0$) và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\sqrt{2}$ (đạt được khi $x = \pm 1$).

Cách 2. Do $|x| \leq 1$, nên tồn tại góc φ với $0 \leq \varphi \leq \pi$, sao cho $x = \cos \varphi$.

Từ đó $y = \sqrt{1 - \cos \varphi} + \sqrt{1 + \cos \varphi} = \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} + \sqrt{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} =$

$= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$

Do $0 \leq \frac{\varphi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$,

$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \leq 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2,$$

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2 và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\sqrt{2}$.

Cách 3. Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpski (bạn đọc tự kiểm tra kết quả này).

Bài toán 9. Cho $a, b > 0$, cố định; x, y là những số dương thay đổi nhưng luôn thoả mãn $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$.

Giải: Cách 1. Ta có

$$x + y = (x + y)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right) = a + b + \frac{ay}{x} + \frac{bx}{y} \geq$$

$$\geq a + b + 2\sqrt{ab} \quad (\text{dùng bất đẳng thức Côsi cho 2 số})$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} \frac{ay}{x} = \frac{bx}{y} \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1. \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ này ta được } \begin{cases} x = a + \sqrt{ab} \\ y = b + \sqrt{ab}. \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski. Ta có:

$$\left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{\frac{b}{y}}\right)^2 \leq [(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2] \cdot \left[\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{y}}\right)^2\right].$$

$$\text{hay là } (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \leq x + y.$$

Từ đó, suy ra giá trị nhỏ nhất của P .

Bài toán 10. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \cos x + \cos y - \cos(x + y).$$

Giải. Cách 1. Ta có

$$P = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - (2 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 1), \text{ vậy}$$

$$2 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 2 \cos \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} + P - 1 = 0.$$

Đây là phương trình bậc hai đối với $\cos \frac{x+y}{2}$

Phương trình này hiển nhiên phải có nghiệm, như vậy ta phải có:

$$\Delta' = \cos^2 \frac{x-y}{2} - 2(P-1) \geq 0, \text{ hay}$$

$$2P \leq 2 + \cos^2 \frac{x-y}{2} \leq 3, \text{ từ đó } P \leq \frac{3}{2},$$

dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $x = y = 60^\circ$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{2}$.

Cách 2. Ta chứng minh rằng

$$\cos x + \cos y - \cos(x + y) \leq \frac{3}{2}, \forall x, y.$$

Thực vậy, bất đẳng thức trên tương đương với:

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - (2 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 1) \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$2 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 2 \cos \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$4 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 4 \cos \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$[2 \cos \frac{x+y}{2} - 2 \cos \frac{x-y}{2}]^2 + \sin^2 \frac{x-y}{2} \geq 0 \quad (1)$$

Bất đẳng thức (1) hiển nhiên đúng.

Từ đó suy ra giá trị của P bằng $\frac{3}{2}$ (đạt được khi $x = y = 60^0$).

BÀI TẬP

1. Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = \sqrt{x^2 + a} + \sqrt{(1-x)^2 + b}$;

b) $y = \sqrt{x^2 + a} + \sqrt{(1+x^2) + b}$;

c) $y = \frac{x^2 + b + c}{|x|(\sqrt{b} + \sqrt{c}) + \sqrt{bc}}$;

d) $y = \frac{x(b+c) + bc}{x^2 + b^2 + c^2}$; e) $y = a|x| + \frac{b}{x^2}$.

2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

a) $y = 4x^3 - x^4$ trên đoạn $0 \leq x \leq 4$;

b) $y = 100x^3 - 7x^4$ trên đoạn $0 \leq x \leq \frac{100}{7}$;

c) $y = 3x^2 - 2x^3$ trên đoạn $0 < x < \frac{3}{2}$;

d) $y = x^4(32 - x^4)$; e) $y = (1-x)^3(1+x)^4$.

3. Chứng minh rằng đa thức sau không nhận giá trị âm.

$$P(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 20.$$

4. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $x^2 + y^2$ khi x, y thoả mãn điều kiện:

$$(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức xy khi x, y thoả mãn các điều kiện:

$$x > 0, y > 0, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

6. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4|;$

b) $y = 2|x - 1| + |x - 2| + |x - 3|.$

7. Tìm giá trị nhỏ nhất của các đã thức

a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45;$

b) $g(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2 - 2x - 10y + 3;$

c) $\varphi(x, y) = (x + y)^2 + (x + 1)^2 + (y - 2)^2;$

d) $p(x, y, z) = (x + y + z)^2 + (x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2.$

8. Cho $a > 0, b > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = \frac{(a+x)(b+x)}{x},$ khi $x > 0;$

b) $y = ax + \frac{b}{x}, x > 0;$ c) $y = ax + \frac{b}{x+1}, x > -1;$

d) $y = ax + \frac{b}{x+a}, x > -a.$

9. Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số:

a) $y = \sqrt{\cos^2 x + 2\sin^2 x} + \sqrt{\sin^2 x + 2\cos^2 x};$

b) $y = \sqrt{\cos^2 x + a\sin^2 x} + b + \sqrt{\sin^2 x + a\cos^2 x} + b, a > 0, b > 0;$

c) $y = \sin^2 x \cdot \cos^6 x;$

d) $y = \frac{x^2 \cos \alpha - 2x + 6 \cos \alpha}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1};$

e) $y = \sin^8 x + \cos^{14} x.$

10. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $f(x, y) = x^2(4 + \log_2^2 y) + 2x \log_2 y + \log_2^2 y;$

b) $f(x, y) = \log_2^2(x + y) + \log_2^2(xy) - 2\log_2(x + y);$

c) $f(x, y) = 2 - \log_3^2 x - 2 \log_3 x \cdot \log_3 \frac{3}{y}$.

11. Xét các số x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x \geq 0, y \geq 0; z \geq 0; x + y + z = 1$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

i) $M = x^2 + y^2 + z^2$, ii) $N = x^4 + y^4 + z^4$;

iii) $K = x^3 + y^3 + z^3$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

i) $m = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$; ii) $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} + \sqrt[4]{z}$;

iii) $k = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}$;

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP

Chương III

1. Áp dụng kết quả của bài tập 3, chương II.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt{x^2 + a} + \sqrt{(1-x)^2 + b} = \\ & = \sqrt{x^2 + (\sqrt{a})^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (b)^2} \geq \sqrt{(x+1-x)^2 + (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \\ & = \sqrt{1 + (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1-x}{x} = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

b) Cách giải tương tự.

c) Áp dụng bất đẳng thức $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$, ta được

$$|x|(\sqrt{b} + \sqrt{c}) + \sqrt{bc} \leq x^2 + b + c.$$

Do vậy $\frac{x^2 + b + c}{|x|(\sqrt{b} + \sqrt{c}) + \sqrt{bc}} \geq 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{|x|}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}}{|x|} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}$

hay $|x| = \sqrt{b} = \sqrt{c}$.

Nếu $b \neq c$ thì giải bằng phương pháp tam thức bậc hai: cần xác định y_0 sao cho:

$$\frac{x^2 + b + c}{|x|(\sqrt{b} + \sqrt{c}) + \sqrt{bc}} \geq y_0, \text{ với mọi } x,$$

hay

$$f(t) = t^2 - y_0(\sqrt{b} + \sqrt{c})t + b + c - y_0\sqrt{bc} \geq 0, \text{ với mọi } t = |x| \geq 0.$$

1) Hoặc $\Delta = (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 y_0^2 - 4(b + c - y_0\sqrt{bc}) \leq 0$, (1), ta được các giá trị của y_0 , trong khoảng hai nghiệm của (1).

2) Hoặc

$$\begin{cases} \Delta > 0, \\ y_0(\sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 0, \\ b + c - y_0\sqrt{bc} \geq 0. \end{cases}$$

Ta được giá trị y_0 cần tìm.

d) Áp dụng phương pháp tam thức bậc hai như ở câu trên.

e) Dùng bất đẳng thức Côsi:

$$\begin{aligned} y &= a|x| + \frac{b}{x^2} = a \frac{|x|}{2} + a \frac{|x|}{2} + \frac{b}{x^2} \geq \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2 bx^2}{4x^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^2 b}{4}}. \end{aligned}$$

2. Áp dụng bất đẳng thức Côsi:

$$a) y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x) = 27\left(\frac{x}{3}\right)^3(4 - x) \leq$$

$$\leq 27 \left(\frac{\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + (4 - x)}{4} \right)^4 = 27.$$

b) Cách giải hoàn toàn tương tự.

3. Đưa về xét tam thức bậc hai biến x , coi y là tham số.

4. Viết lại hệ thức đã cho dưới dạng:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 - y^2) + 1 - (x^2 + y^2) = 0,$$

hay

$$(x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 + 4x^2 = 0,$$

hay

$$(x^2 + y^2 - \frac{3}{2})^2 = -4x^2 + \frac{5}{4}.$$

Do vậy

$$(x^2 + y^2 - \frac{3}{2})^2 \leq \frac{5}{4},$$

hay

$$\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Dấu bằng đạt được khi $x = 0$; $y = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. Ta có:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}. \text{ Mà } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq \frac{2}{xy}, \text{ nên}$$

$$\frac{2}{xy} \leq \frac{1}{2}; \text{ hay } xy \geq 4.$$

Mặt khác $xy \leq (\frac{x+y}{2})^2$. Do vậy:

$$(\frac{x+y}{2})^2 \geq 4. \text{ Vậy } (x+y)^2 \geq 16, \text{ hay } x+y \geq 4.$$

Dấu bằng đạt được khi $x = y = 2$.

6. a) Ta có:

$$\begin{aligned} y &= |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| = \\ &= |x-1| + |x-2| + |3-x| + |4-x| \geq \\ &\geq |x-1| + x-2 + 3-x + 4-x = 4. \end{aligned}$$

Dấu bằng đạt được khi $2 \leq x \leq 3$.

b) Cách giải tương tự.

7. c) Ta có, theo bất đẳng thức Bunhiacôpski:

$$[-(x+y) + x+1 + y-2]^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)[(x+y)^2 + (x+1)^2 + (y-2)^2],$$

hay

$$\frac{1}{3} \leq (x+y)^2 + (x+1)^2 + (y-2)^2.$$

a), b) và d) Cách giải tương tự theo phương pháp trên.

8. a) Ta có

$$y = \frac{ab}{x} + x + (a + b).$$

$$\text{Mà } \frac{ab}{x} + x \geq 2\sqrt{\frac{ab}{x} \cdot x} = 2\sqrt{ab}.$$

Do vậy $y \geq 2\sqrt{ab} + a + b$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{ab}$.

b) Ta có $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$; Dấu bằng đạt được khi $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

c) Ta viết $y = a(x+1) + \frac{b}{x+1} - a \geq 2\sqrt{ab} - a$.

Dấu bằng đạt được khi

$$x+1 = \sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ hay } x = \sqrt{\frac{b}{a}} - 1.$$

d) Ta viết

$$y = (x+a) + \frac{b}{x+a} - a^2 \geq 2\sqrt{ab} - a^2.$$

Dấu bằng đạt được khi $x+a = \sqrt{\frac{b}{a}}$, hay $x = -a + \sqrt{\frac{b}{a}}$.

9. a) Ta có $y^2 = 3 + 2[(\cos^2 x + 2\sin^2 x)(\sin^2 x + 2\cos^2 x)]^{1/2} \leq 3 + [(\cos^2 x + 2\sin^2 x) + (\sin^2 x + 2\cos^2 x)] = 6$

Do vậy $y \leq 6$; dấu bằng đạt được khi $\cos 2x = 0$, tức là khi $x = \pi/2 + k\pi/2$, k - nguyên.

b) Cách giải tương tự.

c) Ta viết hàm số đã cho dưới dạng:

$$y = 27 \cdot \sin^2 x \left(\frac{\cos^2 x}{3} \right)^3 \leq \leq 27 \left(\frac{\sin^2 x + \frac{\cos^2 x}{3} + \frac{\cos^2 x}{3} + \frac{\cos^2 x}{3}}{4} \right)^4 = \frac{27}{256}.$$

d) Dùng phương pháp tam thức bậc hai để tìm miền giá trị.

e) $\max y = 1$.

10. a) Xét biểu thức đã cho như một tam thức bậc hai với biến x , và tham số y .

b) Xét biểu thức đã cho như một tam thức bậc hai theo biến $t = \log_2(x+y)$.

Chương IV

ỨNG DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TRONG PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. Giải và biện luận phương trình, bất phương trình bằng phương pháp so sánh

Trong phần này sẽ xét một số phương trình, bất phương trình và hệ không mẫu mực. Các bài toán này thường được chia thành ba nhóm chính.

1. Các bài toán chứa nhiều loại hàm số khác nhau thường không thể giải bằng các phương pháp biến đổi thông thường.
2. Các bài toán chứa nhiều ẩn số (dạng vô định).
3. Các bài toán chỉ chứa một loại hàm số, song việc thực hiện các phép biến đổi tương đương quá công kềnh và phức tạp.

Ví dụ 1: Giải phương trình.

$$x^2 + 1 = \sqrt[4]{1 - \sin^4 x}.$$

Giải: Ta có

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &\geq 1, \\ \sqrt[4]{1 - \sin^4 x} &\leq 1.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x^2 + 1 \geq 1 \geq \sqrt[4]{1 - \sin^4 x}.$$

Do đó phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 + 1 = 1, \\ \sqrt[4]{1 - \sin^4 x} = 1, \end{cases}$$

$$\text{hay } \begin{cases} x = 0, \\ \sin x = 0. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x = 0$. Do vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$2^{2+\sin^2 x} + 2^{2+\cos^2 x} = -16x^2 + 24|x| - 1.$$

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$2^{2+\sin^2 x} + 2^{2+\cos^2 x} \geq 2\sqrt{2^{4+\sin^2 x + \cos^2 x}} = 8\sqrt{2}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} -16x^2 + 24|x| - 1 &= -(16x^2 - 24|x| + 9) + 8 = \\ &= -(4|x| - 3)^2 + 8 \leq 8. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } 2^{2+\sin^2 x} + 2^{2+\cos^2 x} \geq 8\sqrt{2} > 8 \geq -16x^2 + 24|x| - 1.$$

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 3. Giải phương trình:

$$2^{\cos x} = \cos x + \frac{1}{\cos x}.$$

Giải: Điều kiện $\cos x \neq 0$, hay $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k$ nguyên.

Ta có: $2^{\cos x} > 0$.

$$1) \text{ Nếu } \cos x < 0 \text{ thì } \cos x + \frac{1}{\cos x} < 0 < 2^{\cos x}$$

trường hợp này phương trình vô nghiệm.

2) Xét $\cos x > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} \geq 2\sqrt{\cos x \cdot \frac{1}{\cos x}} = 2.$$

$$\text{Mặt khác: } 2^{\cos x} \leq 2^1 = 2.$$

$$\text{Do đó, } \cos x + \frac{1}{\cos x} \geq 2 \geq 2^{\cos x}.$$
 Trong trường hợp này,

phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} \cos x + \frac{1}{\cos x} = 2, \\ 2^{\cos x} = 2; \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x = 2n\pi$; n nguyên

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\sin x + \cos x = \sqrt{y^2 - 2y + 3}.$$

Giải: Ta có $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$.

$$\sqrt{y^2 - 2y + 3} = \sqrt{y^2 - 2y + 1 + 2} = \sqrt{(y-1)^2 + 2} \geq \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \sin x + \cos x \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{y^2 - 2y + 3}.$$

Suy ra phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2}, \\ \sqrt{y^2 - 2y + 3} = \sqrt{2}; \end{cases}$$

$$\text{hay} \begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \\ y = 1; \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \text{ nguyên}, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ví dụ 5. Giải và biện luận phương trình:

$$|x| + \cos x = \sqrt{1 - a^2} - 1, \quad -1 \leq a \leq 1.$$

Giải: Ta có $\sqrt{1 - a^2} - 1 \leq 0$. Do vậy, nếu phương trình có nghiệm $x = x_0$ thì phải có:

$$|x_0| + \cos x_0 \leq 0, \tag{1}$$

$$\text{hay } |x_0| \leq -\cos x_0.$$

$$\text{Suy ra } |x_0| \leq 1, \text{ hay } -1 \leq x_0 \leq 1.$$

Vì trong khoảng này $\cos x_0 > 0$, nên $|x_0| + \cos x_0 > 0$, điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức (1). Vậy với mọi a ($-1 \leq a \leq 1$) phương trình đã cho đều vô nghiệm.

Ví dụ 6. Giải và biện luận bất phương trình:

$$2^{x^2} + 2^{\sin^2 x} \leq 1 + \sqrt{1 - a^2}; \quad -1 \leq a \leq 1.$$

Giải. Ta có $2^{x^2} \geq 2^0 = 1$,

$$2^{\sin^2 x} \geq 2^0 = 1.$$

Do vậy $2^{x^2} + 2^{\sin^2 x} \geq 2$, (1) dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2^{x^2} = 1, \\ 2^{\sin^2 x} = 1. \end{cases}$$

1) Nếu $a \neq 0$ thì $1 + \sqrt{1 - a^2} < 0$. Do vậy:

$$2^{x^2} + 2^{\sin^2 x} \geq 2 > 1 + \sqrt{1 - a^2}.$$

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

2) Nếu $a = 0$ thì $1 + \sqrt{1 - a^2} = 2$. Khi đó

$$2^{x^2} + 2^{\sin^2 x} \geq 2 = 1 + \sqrt{1 - a^2}.$$

Trong trường hợp này, bất phương trình đã cho tương đương với phương trình $2^{x^2} + 2^{\sin^2 x} = 2$, tức là dấu bằng của (1) xảy ra, vậy:

$$\begin{cases} 2^{x^2} = 1, \\ 2^{\sin^2 x} = 1; \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} x = 0 \\ \sin x = 0. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x = 0$.

Tóm lại: 1) Nếu $a \neq 0$ thì bất phương trình vô nghiệm;

2) Nếu $a = 0$ thì nghiệm là $x = 0$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2} + \sin^2 z.$$

Giải. Biến đổi phương trình đã cho như sau:

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - 2 \cos^2 \frac{x+y}{2} + 1 = \frac{3}{2} + \sin^2 z,$$

$$\text{hay: } 2\cos^2 \frac{x+y}{2} - 2\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \frac{1}{2} + \sin^2 z = 0,$$

$$\text{hay: } 4\cos^2 \frac{x+y}{2} - 4\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 1 + 2\sin^2 z = 0,$$

$$\text{hay: } (2\cos \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x-y}{2})^2 + \sin^2 \frac{x-y}{2} + 2\sin^2 z = 0.$$

Vế trái là tổng của ba số không âm. Do đó, phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2\cos \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x-y}{2} = 0, \\ \sin \frac{x-y}{2} = 0, \\ \sin z = 0; \end{cases}$$

$$\text{hay } \begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \cos k\pi, \\ \frac{x+y}{2} = k\pi, \quad k \text{ nguyên} \\ z = n\pi, \quad n \text{ nguyên}; \end{cases}$$

$$\text{hay } \begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} = \cos(\frac{\pi}{3} + k\pi), \\ \frac{x-y}{2} = k\pi, \quad k \text{ nguyên}, \\ z = n\pi; \quad n \text{ nguyên}; \end{cases}$$

$$\text{hay } \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \pm(\frac{\pi}{3} + k\pi) + 2m\pi, \\ \frac{x-y}{2} = k\pi, \\ z = n\pi; \quad k, n, m \text{ là những số nguyên} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi + 2m\pi, \\ y = \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \\ z = n\pi; \quad k, n, m \text{ là những số nguyên} \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2m\pi, \\ y = -\frac{\pi}{3} - 2k\pi + 2m\pi, \\ z = n\pi; \quad k, n, m \text{ là những số nguyên} \end{cases}$$

Ví dụ 9. Giải phương trình

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x+y) = \frac{9}{4}.$$

Giải: Biến đổi vế trái ta được

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x+y) &= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 2y}{2} + \\ &+ 1 - \cos^2(x+y) = 2 - \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 2y) - \cos^2(x+y) \end{aligned}$$

Vậy có thể viết phương trình đã cho dưới dạng

$$2 - \cos(x+y)\cos(x-y) - \cos^2(x+y) = \frac{9}{4}.$$

$$\text{hay: } \cos^2(x+y) + \cos(x+y)\cos(x-y) + \frac{1}{4} = 0,$$

$$\text{hay: } [\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(x-y) = 0.$$

Vế trái là tổng của hai số không âm. Do vậy, phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} \sin(x-y) = 0, \\ \cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y) = 0, \end{cases}$$

$$\text{hay } \begin{cases} x - y = k\pi, \\ \cos(x + y) = -\frac{1}{2} \cos(k\pi) = \cos \frac{2\pi}{3} + k\pi, \end{cases}$$

k - nguyên;

$$\text{hay } \begin{cases} x - y = k\pi \\ x + y = \pm(\frac{2\pi}{3} + k\pi) + 2n\pi; \quad k, n, \text{ là những số nguyên.} \end{cases}$$

Giải hệ này ta được các nghiệm

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi + n\pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{3} + n\pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{3} + n\pi, \\ y_2 = -\frac{\pi}{3} - k\pi + n\pi; \end{cases}$$

k, n là những số nguyên.

Ví dụ 10. Giải phương trình

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \cot^2(x + y) = 1.$$

Giải: Từ công thức

$$\cot g(x + y) = \frac{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y},$$

$$\text{ta suy ra: } \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \cot g(x + y) + \operatorname{tg} y \cot g(x + y) = 1. \quad (1)$$

$$\text{Do đó, có thể viết phương trình đã cho dưới dạng } \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \cot^2(x + y) = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \cot g(x + y) + \operatorname{tg} y \cot g(x + y).$$

Chuyển về một vế và nhân 2 vế với 2, ta được

$$(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y)^2 + (\operatorname{tg} x - \cot g(x + y))^2 + (\operatorname{tg} y - \cot g(x + y))^2 = 0.$$

Vậy (x, y) là nghiệm của phương trình khi và chỉ khi

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg}(x + y) = \operatorname{tg} y - \operatorname{cotg}(x + y) = 0.$$

$$\text{Suy ra: } \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{cotg}(x + y).$$

Kết hợp với (1), ta được

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{cotg}(x + y) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Giải ra, ta được

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{6} + n\pi, \end{cases}$$

k, n là những số nguyên;

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \\ y_2 = -\frac{\pi}{6} + n\pi, \end{cases}$$

k, n là những số nguyên.

Ví dụ 11. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sin(x + 2y) = y^2 + y + 1, \\ \sin(x - 2y) = y^2 - y + 1. \end{cases}$$

Giải: Nhận xét rằng, nếu $y > 0$, thì $y^2 + y + 1 > 1$, khi đó hệ phương trình vô nghiệm. Tương tự, nếu $y < 0$ thì $y^2 - y + 1 > 1$ khi đó hệ cũng vô nghiệm.

Xét $y = 0$, khi đó hệ đã cho có dạng

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = 1, \end{cases} \quad \text{hay } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \text{ nguyên.}$$

Ta được nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k$ là số nguyên, $y = 0$.

Ví dụ 12. Giải phương trình

$$\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x.$$

Giải: Viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$\sin x - \sin 3x + 2\sin 2x = 3,$$

$$\text{hay } -2\sin x \cdot \cos 2x + 2\sin 2x = 3,$$

$$\text{hay } -\sin x \cdot \cos 2x + \sin 2x = \frac{3}{2}.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski, thì

$$(-\sin x \cdot \cos 2x + 1 \cdot \sin 2x)^2 \leq (\sin^2 x + 1)(\cos^2 2x + \sin^2 2x) \leq 2.$$

Do vậy

$$(-\sin x \cdot \cos 2x + \sin 2x) \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 13. Giải phương trình

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^{18} x + \cos^{18} x.$$

Giải: Viết phương trình dưới dạng

$$(\sin^4 x - \sin^{18} x) + (\cos^4 x - \cos^{18} x) = 0,$$

$$\text{hay } \sin^4 x(1 - \sin^{14} x) + \cos^4 x(1 - \cos^{14} x) = 0.$$

Vế trái là tổng của hai số không âm. Do vậy phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} \sin^4 x(1 - \sin^{14} x) = 0, \\ \cos^4 x(1 - \cos^{14} x) = 0. \end{cases}$$

1) Với $\sin x = 0$ thì $\cos^{14} x = 1$, ta được $x = k\pi$ là nghiệm, k - nguyên.

2) với $\cos x = 0$, thì $\sin^{14} x = 1$, ta được nghiệm

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n - \text{nguyên}.$$

3) Với $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, thì $\sin^4 x(1 - \sin^{14} x) \neq 0$. Trường hợp này phương trình đã cho không có nghiệm.

Ví dụ 14. Giải phương trình

$$2^{x^2} + 3^{x^2} + 4^{x^2} + 5^{x^2} = 4^{1-x^2}.$$

Giải: Do $x^2 \geq 0$, nên

$$2^{x^2} \geq 1; 3^{x^2} \geq 1; 4^{x^2} \geq 1; 5^{x^2} \geq 1; 4^{1-x^2} \leq 4.$$

Từ đó suy ra

$$2^{x^2} + 3^{x^2} + 4^{x^2} + 5^{x^2} \geq 4 \geq 4^{1-x^2}.$$

Vậy x là nghiệm của phương trình đã cho, khi và chỉ khi

$$2^{x^2} + 3^{x^2} + 4^{x^2} + 5^{x^2} = 4 = 4^{1-x^2}.$$

Từ đó ta có nghiệm duy nhất $x = 0$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Ví dụ 15: Giải bất phương trình

$$10^x < \lg x.$$

Giải: Điều kiện để $\lg x$ có nghĩa là $x > 0$.

1) Nếu $0 < x \leq 1$, thì $\lg x \leq \lg 1 = 0 < 10^x$. Do đó trong khoảng này bất phương trình vô nghiệm.

2) Nếu $1 < x \leq 10$ thì $\lg x \leq \lg 10 < x \leq 10 \leq 10^x$. Do đó trong khoảng này bất phương trình cũng vô nghiệm.

Ta chứng minh rằng trong mọi khoảng $(10^n, 10^{n+1}]$, n - nguyên, dương, bất phương trình cũng vô nghiệm.

Ta thấy, với $n = 0$ thì theo 2) điều này đúng. Giả sử, kết luận này cũng đúng với $n = k$ nguyên dương, ta chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp thì khi $10^k < x \leq 10^{k+1}$, ta có $10^x > \lg x$.

Xét $10^{k+1} < x \leq 10^{k+2}$. Khi đó: $10^k < \frac{x}{10} \leq 10^{k+1}$.

Do vậy $10^{x/10} > \lg \frac{x}{10}$,

hay $10^{x/10} > \lg x - 1$,

hay $10^{x/10} + 1 > \lg x$. Mặt khác $10^x = 5^x \cdot 2^x > 2 \cdot 2^x =$

$$= 2^x + 2^x > 2^x + 1 > (\sqrt[10]{10})^x + 1 =$$

$$= 10^{x/10} + 1, \text{ khi } x \geq 1,$$

nên $10^x > \lg x$. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

§2. Một số bài toán khác liên quan đến nghiệm của phương trình và bất phương trình

Ví dụ 16. Chứng minh rằng nếu x_0 là nghiệm của phương trình

$$x^2 + ax + b = 0, \text{ thì}$$

$$\frac{x_0^4}{1+x_0^2} \leq a^2 + b^2.$$

Giải: Theo giả thiết thì $x_0^2 = -ax_0 - b$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôski, ta được

$$x_0^4 = (-ax_0 - b)^2 \leq (a^2 + b^2)(x_0^2 + 1).$$

Do vậy

$$\frac{x_0^4}{1+x_0^2} \leq a^2 + b^2.$$

Ví dụ 17. Chứng minh rằng nếu x_0 là nghiệm của phương trình:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \text{ thì}$$

$$x_0^2 \leq 1 + a^2 + b^2 + c^2. \quad (1)$$

Giải: Nếu $x_0^2 \leq 1$ thì (1) đúng.

Xét trường hợp $x_0^2 > 1$. Theo giả thiết thì

$$x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + c = 0,$$

hay
$$x_0^3 = -x_0^2 - bx_0 - c.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôski, ta được

$$x_0^6 = (-ax_0^2 - bx_0 - c)^2 \leq$$

$$\leq (a^2 + b^2 + c^2)(x_0^4 + x_0^2 + 1) =$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{x_0^6 - 1}{x_0^2 - 1}. \text{ Do } x_0^2 > 1 \text{ nên suy ra:}$$

$$\frac{x_o^6(x_o^2 - 1)}{x_o^6 - 1} \leq a^2 + b^2 + c^2,$$

$$\text{hay } \frac{x_o^6(x_o^2 - 1)}{x_o^6 - 1} + 1 \leq 1 + a^2 + b^2 + c^2,$$

$$\text{hay } \frac{x_o^8 - 1}{x_o^6 - 1} \leq 1 + a^2 + b^2 + c^2. \quad (2)$$

Mặt khác, vì $x_o^2 > 1$, nên $-x_o^2 < -1$.

Do vậy $x^8 - x_o^2 < x_o^8 - 1$, hay $\frac{x_o^8 - 1}{x_o^6 - 1} > x_o^2$.

Kết hợp với (2) ta được $x_o^2 \leq 1 + a^2 + b^2 + c^2$.

Ví dụ 18. Chứng minh rằng nếu phương trình

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

có nghiệm, thì $a^2 + (b - 2)^2 > 3$.

Giải: Giả sử $x = x_o$ là nghiệm của phương trình. Khi đó $x_o \neq 0$, và $x_o^4 + ax^3 + bx_o^2 + ax_o + 1 = 0$. Chia hai vế cho x_o^2 ta được $(x_o^2 + \frac{1}{x_o^2}) + a(x_o + \frac{1}{x_o}) + b = 0$,

$$\text{hay } (x_o + \frac{1}{x_o})^2 + a(x_o + \frac{1}{x_o}) + b - 2 = 0. \quad (*)$$

$$\text{Đặt } x_o + \frac{1}{x_o} = y_o, \text{ thì } |y_o| = \left| x_o + \frac{1}{x_o} \right| =$$

$$= |x_o| + \frac{1}{|x_o|} \geq 2 \text{ và } (*) \text{ sẽ có dạng:}$$

$$y_o^2 + ay_o + b - 2 = 0.$$

Vậy

$$y_o^2 = -ay_o - b + 2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta được:

$$y_o^4 = (-ay_o - b + 2)^2 \leq [a^2 + (b - 2)^2](y_o^2 + 1),$$

$$\text{hay } \frac{y_o^4}{y_o^2 + 1} \leq a^2 + (b - 2)^2. \quad (**)$$

Do $y_o^2 \geq 4$ nên:

$$\frac{y_o^4}{y_o^2 + 1} \geq \frac{y_o^4}{y_o^2 + \frac{y_o^4}{4}} = \frac{y_o^2}{\frac{5}{4}} \geq \frac{4}{5} = \frac{16}{5} > 3.$$

Kết hợp với (**), ta suy ra:

$$3 < a^2 + (b - 2)^2.$$

Ví dụ 19. Chứng minh rằng nếu phương trình

$$(x + y)^2 + (x + a)^2 + (y + b)^2 = c^2$$

có nghiệm, thì

$$3c^2 \geq (a + b)^2.$$

Giải: Giả sử (x_o, y_o) là nghiệm của phương trình, thì

$$(x_o + y_o)^2 + (x_o + a)^2 + (y_o + b)^2 = c^2$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta có:

$$\begin{aligned} [1.(x_o + y_o) + 1.(-x_o - a) + 1.(-y_o - b)]^2 &\leq \\ &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2).[(x_o + y_o)^2 + (x_o + a)^2 + (y_o + b)^2], \end{aligned}$$

hay $(a + b)^2 \leq 3c^2$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 20. Hãy xác định m sao cho hệ phương trình sau có nghiệm (x_o, y_o, z_o) dương, $(x_o > 0, y_o > 0, z_o > 0)$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ xy + yz + zx = 9m, \\ xyz = m. \end{cases}$$

Giải: Giả sử hệ có nghiệm dương $x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0$. Khi đó

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = 1, \\ x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 = 9m, \\ x_0 y_0 z_0 = m. \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm x_0, y_0, z_0 ta được:

$$1 = x_0 + y_0 + z_0 \geq 3\sqrt[3]{x_0 y_0 z_0}.$$

$$\text{Vậy } 1 \geq 3\sqrt[3]{m}, \text{ hay } m \leq \frac{1}{27}. \quad (1)$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Côsi ta được

$$9m = x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 \geq 3\sqrt[3]{(x_0 y_0 z_0)^2}.$$

$$\text{Vậy: } 9m \geq 3\sqrt[3]{m^2}, \text{ hay } m \geq \frac{1}{27}. \quad (2)$$

$$\text{Kết hợp (1) và (2), ta được } m = \frac{1}{27}.$$

Ngược lại, khi $m = \frac{1}{27}$, thì hệ đã cho có nghiệm dương:

$$x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{3}; z = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 21. Hãy xác định giá trị lớn nhất của c sao cho hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 1, \\ \cos x \cos y \cos z = c. \end{cases}$$

Giải: Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0, z_0) . Khi đó

$$\begin{cases} \cos x_0 + \cos y_0 + \cos z_0 = 1, \\ \cos x_0 \cdot \cos y_0 \cdot \cos z_0 = c. \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp sau đây:

$$1) \cos x_0 \cdot \cos y_0 \cdot \cos z_0 \leq 0. \text{ Khi đó } c \leq 0. \quad (1)$$

2) $\cos x_0 \cdot \cos y_0 \cdot \cos z_0 > 0$. Khi đó có hai khả năng xảy ra:

a) Một thừa số dương, hai thừa số còn lại âm;

b) Cả ba thừa số đều dương.

Khả năng a) không thể xảy ra vì nếu $\cos x_0 < 0$, $\cos y_0 < 0$, $\cos z_0 < 0$, thì $\cos x_0 < 1 - \cos x_0 - \cos y_0$.

Do vậy:

$$\cos x_0 + \cos y_0 + \cos z_0 < 1.$$

Xét khả năng b) $\cos x_0 > 0$, $\cos y_0 > 0$, $\cos z_0 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được

$$1 = \cos x_0 + \cos y_0 + \cos z_0 \geq 3^3 \sqrt{\cos x_0 \cos y_0 \cos z_0} = 3^3 \sqrt{c}.$$

$$\text{Do vậy } c \leq \frac{1}{27}. \quad (2)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\cos x_0 = \cos y_0 = \cos z_0 = \frac{1}{3}$.

Kết hợp (1) và (2) ta được giá trị lớn nhất của c bằng:

$$c = \frac{1}{27}.$$

Ví dụ 22. Cho x_1, x_2 ($x_1 x_2 \neq 0$) là các nghiệm của phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$, (1)

và cho y_1, y_2 là các nghiệm của phương trình:

$$cy^2 + by + a = 0. \quad (2)$$

Chứng minh rằng:

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \geq 4.$$

Giải: Theo giả thiết thì x_1 là nghiệm của (1) nên:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0,$$

$$\text{hay: } x_1^2 \left(c \cdot \frac{1}{x_1^2} + b \cdot \frac{1}{x_1} + a \right) = 0.$$

Do vậy $\frac{1}{x_1}$ là nghiệm của (2). Tương tự $\frac{1}{x_2}$ cũng là nghiệm của (2). Vậy:

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} + x_2^2 + \frac{1}{x_2^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được

$$x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} \geq 2, x_2^2 + \frac{1}{x_2^2} \geq 2.$$

Do vậy $x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \geq 2 + 2 = 4$.

§3. Bài toán với các phương pháp giải khác nhau

Bài toán 1. Giải phương trình sau

$$\sqrt{6-x} + \sqrt{x-4} = x^2 - 10x + 27.$$

Giải: Cách 1. Điều kiện

$$4 \leq x \leq 6.$$

Ta xét vế phải: $y_1 = (x-5)^2 + 2 \geq 2$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 5$.

Vế trái là tổng 2 số không âm, nên đặt

$$y_2 = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4} \geq 0, \text{ và do đó } y_2 \text{ và } y_2^2 = 2 + 2\sqrt{(6-x)(x-4)}$$

đạt giá trị lớn nhất đồng thời. y_2^2 đạt giá trị lớn khi $((6-x)(x-4))$ đạt giá trị lớn nhất. Đây là tích 2 số không âm, có tổng không đổi bằng 2, nên nó lớn nhất khi:

$$6-x = x-4, \text{ hay } x = 5, \text{ khi đó } y_2 = 2.$$

Vậy $y_2 \leq 2$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 5$.

Vậy: $y_1 = y_2$ chỉ khi $x = 5$ và phương trình đã cho có nghiệm $x = 5$.

Cách 2. Đặt $y = \sqrt{6-x}, z = \sqrt{x-4}$, suy ra $y, z \geq 0$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y+z=t \\ y^2+z^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=t \\ yz=\frac{t^2-2}{2} \end{cases}.$$

y, z là nghiệm dương của phương trình sau:

$$X^2 - tX + \frac{t^2 - 2}{2} = 0;$$

$$\Delta = 4 - t^2 \geq 0, \Rightarrow t \leq 2 \text{ vì } t > 0$$

$$\text{Vậy: } t = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4} \leq 2 \leq (x-5)^2 + 2.$$

Vậy phương trình đã cho chỉ có nghiệm khi $t = 5$, từ đó suy ra $\sqrt{6-x} = \sqrt{x-4}, \Rightarrow x = 5$.

Kiểm tra lại $x = 5$ đúng là nghiệm cần tìm.

Bài toán 2. Giải phương trình

$$6\sin\pi x = x^2 - 5x + 12,25.$$

$$\text{Giải. Xét vế phải: } x^2 - 5x + 12,25 = (x - \frac{5}{2})^2 + 6 \geq 6.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = \frac{5}{2}.$$

Lại có $6\sin\pi x \leq 6$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin\pi x = 1, \Rightarrow \pi x = \pi/2 + 2k\pi, \Rightarrow x = \frac{1}{2} + 2k, k$ là số nguyên, x đạt giá trị $x = \frac{5}{2}$, khi $k = 1$.

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm } x = \frac{5}{2}.$$

Bài toán 3. Giải phương trình

$$\log_2(x^2 + 1) - \log_2 x = 3x^2 - 2x^3.$$

Giải. Điều kiện $x > 0$. Khi đó

$$\log_2(x^2 + 1) - \log_2 x = \log_2(x + \frac{1}{x}) \geq \log_2 2 = 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Xét vế phải: $y = 3x^2 - 2x^3$; $y' = 6x - 6x^2$, $y' = 0$ khi $x = 0$, $x = 1$.

Ta lập bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
y'	0	+	0 -
y	0	1	

Do đó $y \leq 1$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.
Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1$.

Bài toán 4. Giải phương trình

$$\sin x + \sin y + \cos(x + y) = \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Giải: Cách 1. Biến đổi phương trình:

$$\begin{aligned} 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{x+y}{2} &= \frac{3}{2} \Leftrightarrow \\ 2\sin^2 \frac{x+y}{2} - 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \frac{1}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Nếu coi $\sin \frac{x+y}{2}$ là ẩn thì phương trình bậc 2 đó có:

$$\Delta' = \cos^2 \frac{x-y}{2} - 1 = -\sin^2 \frac{x-y}{2} \leq 0.$$

Vậy để phương trình có nghiệm ta cần có điều kiện

$$\Delta' = -\sin^2 \frac{x-y}{2} = 0 \Rightarrow \cos \frac{x-y}{2} = \pm 1$$

và
$$\sin \frac{x+y}{2} = -\frac{b}{2a} = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x + y = \pm \frac{\pi}{3} + 2k_1\pi \\ x - y = \pm 2k_2\pi. \end{cases}$$

Nghiệm cần tìm là:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + (k_1 + k_2)\pi, \\ y = \pm \frac{\pi}{6} + (k_1 - k_2)\pi. \end{cases}$$

Cách 2. Biến đổi (2)

$$(2) \Leftrightarrow 4\sin^2 \frac{x+y}{2} - 4\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 \frac{x+y}{2} - 4\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \cos^2 \frac{x-y}{2} + \sin^2 \frac{x-y}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x-y}{2})^2 + \sin^2 \frac{x-y}{2} = 0$$

Suy ra hệ
$$\begin{cases} 2\sin \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x-y}{2} = 0. \\ \sin \frac{x-y}{2} = 0. \end{cases}$$

Giải hệ này ta thu được nghiệm như ở cách 1.

Bài toán 5. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{2\cos x}{3}} + \sqrt{\frac{2-2\cos x}{3}} = \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{2\sin x}. \quad (1)$$

Giải: Điều kiện $\cos x \geq 0$, $\sin x > 0$. (để phương trình có nghiệm)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho vế phải:

$$\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{2\sin x} \geq 2\sqrt{\frac{2}{3}\sin x \cdot \frac{1}{2\sin x}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad (2)$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \text{ cho vế trái ta được:}$$

$$\left(\sqrt{\frac{2\cos x}{3}} + \sqrt{\frac{2-2\cos x}{3}}\right)^2 \leq 2\left[\left(\sqrt{\frac{2\cos x}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2-2\cos x}{3}}\right)^2\right] = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{2\cos x}{3}} + \sqrt{\frac{2-2\cos x}{3}} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad (3)$$

Vậy: phương trình có nghiệm chỉ khi cả (2) và (3) đều xảy ra dấu bằng, tức là khi:

$$\sqrt{\frac{2\cos x}{3}} = \sqrt{\frac{2-2\cos x}{3}} \text{ và } \frac{2}{3}\sin x = \frac{1}{2\sin x}.$$

Giải ra được

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Cách 2. Với vế phải ta có (2), còn ước lượng vế trái bằng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta có:

$$\begin{aligned} & \left(1 \cdot \sqrt{\frac{2\cos x}{3}} + 1 \cdot \sqrt{\frac{2-2\cos x}{3}}\right)^2 \leq \\ & \leq (1^2 + 1^2) \left[\frac{2\cos x}{3} + \frac{2-2\cos x}{3}\right] = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } VT \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \leq VF$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm khi } VT = VF = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Giải tiếp tục như ở trên ta có nghiệm

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

Bài toán 6. Giải phương trình

$$\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{\sin x} = 2 \cos x - \cos^2 x.$$

Giải: **Cách 1.** Điều kiện: $\sin x \geq 0$.

Xét vế trái $y = \sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{\sin x}$.

Ta có $y^2 = 1 - \sin x + \sin x + 2\sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{\sin x} \geq 1$, tức là $y \geq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\text{hoặc } \sqrt{1 - \sin x} = 0 \text{ hay } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$\text{hoặc } \sin x = 0 \text{ hay } x = k\pi.$$

Xét vế phải $2\cos x - \cos^2 x = \cos x(2 - \cos x)$.

Do vế trái là số dương, cần có $\cos x > 0$.

Ta có bất đẳng thức:

$$\sqrt{\cos x(2 - \cos x)} \leq \frac{\cos x + 2 - \cos x}{2} = 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\cos x = 2 - \cos x \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi.$$

Do $VT \leq 1 \leq VF$ nên phương trình có nghiệm khi 2 vế đồng thời = 1 nên nghiệm cần tìm là $x = 2k\pi$.

Cách 2. Chú ý rằng có thể biến đổi vế phải như sau:

$$VF = 1 - (\cos x - 1)^2 \leq 1.$$

Bài toán 7. Giải các phương trình:

$$1) \sqrt{x+3} + 4\sqrt{x-1} + \sqrt{x+15-8\sqrt{x-1}} = 6;$$

$$2) \sqrt{x+\sqrt{6x-9}} + \sqrt{x-\sqrt{6x-9}} = \sqrt{6}.$$

Giải: 1) Trước hết phải có $x - 1 \geq 0$; hay $x \geq 1$. Đặt $y = \sqrt{x-1} \geq 0$, khi đó phương trình trở thành:

$$\sqrt{x-1+4\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{x-1-8\sqrt{x-1}+16} = 6,$$

$$\text{hay } \sqrt{y^2+4y+4} + \sqrt{y^2-8y+16} = 6,$$

$$\text{hay } \sqrt{(y+2)^2} + \sqrt{(y-4)^2} = 6.$$

Thành thử ta không phải đặt điều kiện cho hai căn ngoài.
Từ phương trình cuối ta có:

$$|y+2| + |y-4| = 6.$$

Vì $y \geq 0$, nên $|y+2| = y+2$ và ta có

$$y+2 + |y-4| = 6$$

$$\text{hay } y-4 + |y-4| = 0$$

Nếu $y-4 \geq 0$ hay $y \geq 4$, ta có $y = 4$

Nếu $y-4 < 0$ hay $y < 4$ ta có $y-4 - y+4 = 0$ luôn luôn đúng, nên $0 \leq y < 4$.

Vậy nghiệm của phương trình là những x thoả mãn $0 \leq y \leq 4$ hay $0 \leq \sqrt{x-1} \leq 4$, suy ra $0 \leq x-1 \leq 16$

$$\text{Vậy } 1 \leq x \leq 17.$$

2) Điều kiện để căn thức bên trong có nghĩa là $6x-9 \geq 0$

hay $x \geq \frac{3}{2}$. Đặt $\sqrt{6x-9} = y \geq 0$, khi đó $x = \frac{y^2+9}{6}$. Thay vào phương trình ta được

$$\sqrt{y^2+6y+9} + \sqrt{y^2-6y+9} = 6$$

$$\text{hay } \sqrt{(y+3)^2} + \sqrt{(y-3)^2} = 6.$$

Thành thử hai căn ngoài luôn có nghĩa khi $x \geq \frac{3}{2}$.

Từ phương trình cuối ta có:

$$|y+3| + |y-3| = 6.$$

Vì $y \geq 0$, nên $|y+3| = y+3$ và ta có:

$$y+3 + |y-3| = 6.$$

$$\text{hay } y-3 + |y-3| = 0.$$

Nếu $y-3 \geq 0$ hay $y \geq 3$, ta có $y = 3$.

Nếu $y - 3 < 0$ hay $y < 3$, ta có $y - 3 - y + 3 = 0$ đúng với mọi y : $0 \leq y < 3$, và nghiệm của phương trình là những x thỏa mãn:

$$0 \leq y \leq 3$$

$$\text{hay } 0 \leq \sqrt{6x - 9} \leq 3$$

$$\text{hay } 0 \leq 6x - 9 \leq 9$$

$$\text{hay } \frac{3}{2} \leq x \leq 3.$$

Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm là

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 3.$$

Bài toán 8.

1) Giải bất phương trình

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}.$$

2) Giải phương trình

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \frac{x-1}{x} = 0$$

Giải: 1) Điều kiện: $x - \frac{1}{x} \geq 0$, $1 - \frac{1}{x} \geq 0$, $x \neq 0$ suy ra $-1 \leq x < 0$

hoặc $x \geq 1$.

Vì $x = 1$ không phải là nghiệm (vì nếu trái lại ta có $0 > 0$) nên $-1 \leq x < 0$ hoặc $x > 1$. Ta viết bất phương trình dưới dạng:

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x}} (\sqrt{x+1} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 1) > 0.$$

Do $-1 \leq x < 0$ hoặc $x > 1$, nên $1 - \frac{1}{x} > 0$, ta suy ra

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 1 > 0$$

$$\text{hay } \sqrt{x+1} > \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1.$$

Vì hai vế dương, nên bình phương hai vế ta được

$$x+1 > 1 - \frac{1}{x} + 1 + 2\sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\text{hay} \quad (x-1) + \frac{1}{x} > 2\sqrt{1 - \frac{1}{x}} \quad (1)$$

Nếu $-1 \leq x < 0$, vế trái của (1) âm, vế phải dương, nên bất phương trình vô nghiệm. Vậy còn lại $x > 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ở vế trái của (1) ta được:

$$(x-1) + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x-1 = 1/x$ hay $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Kết hợp với $x > 1$ ta có nghiệm của bất đẳng thức là:

$$x > 1, x \neq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Chú ý. Nếu không nhận xét được hai số hạng vế trái dương và áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, thì có thể bình phương hai vế của (1) và giải tiếp như sau:

$$x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{x^2} + 2(x-1)\frac{1}{x} > 4(1 - \frac{1}{x}).$$

$$\text{hay} \quad x^2 + \frac{12}{x^2} - 2(1 + \frac{1}{x}) - 1 > 0.$$

$$\text{Đặt } t = x - \frac{1}{x}, \text{ khi đó } t^2 = x^2 + \frac{1^2}{x^2} - 2 \text{ và ta có } t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 > 0,$$

suy ra: $t \neq 1$, tức là $x \neq (1 + \sqrt{5})/2$ và ta cũng đi đến đáp số $x > 1$, $x \neq (1 + \sqrt{5})/2$.

2) Cũng như bài 1), ta được điều kiện $x \geq 1$ hoặc $-1 \leq x < 0$.

Với $-1 \leq x < 0$ cả ba số hạng ở vế trái đều dương, nên phương trình vô nghiệm.

Với $x \geq 1$ ta có tổng ba số không âm bằng 0, nên mỗi số phải bằng 0. Vậy

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = 0, \\ 1 - \frac{1}{x} = 0, \\ \frac{x-1}{x} = 0 \end{cases}$$

Suy ra $x = 1$.

BÀI TẬP

1. Giải các phương trình:

a) $\sin x + \sin y + \cos(x + y) = \frac{3}{2}$;

b) $\sin x + \sin y - \cos(x + y) = -\frac{3}{2}$;

2. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{\frac{2\cos x}{3}} + \sqrt{\frac{2-2\cos x}{3}} = \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{2\sin x}$;

b) $\sqrt{1-\sin x} + \sqrt{\sin x} = 2\cos x - \cos^2 x$.

3. Giải các phương trình:

a) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$;

b) $\sin^3 x + \cos^3 x + \sin^9 x + \cos^9 x = 2$.

4. Giải các phương trình:

a) $\sin x \sin 2x \sin 3x = 1$; b) $\cos x \cos 2x \cos 3x = 1$.

5. Giải các bất phương trình:

a) $x^4 + \sqrt[3]{\cos x} > 0$; b) $2^{x^2-1} + \cos x > 0$.

6. Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{1+x^2} > \lg \lg x$; b) $2^x + 3^x > \log_2 x + \log_3 x$.

7. Giải các phương trình:

a) $2^{x^2} + 3^{x^2} + 4^{x^2} = 2 + 2x - x^2$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \log_2(2 - x^2) + \log_3(3 - x^2) + \log_4(4 - x^2) &= \\ &= x^2 - 4x + 7. \end{aligned}$$

8. Chứng minh rằng nếu phương trình sau có nghiệm:

$$2x^2 + (x + a)^2 + (x + b)^2 = c^2,$$

thì:

$$4c^2 \geq 3a^2 + 3b^2 - 2ab.$$

9. Chứng minh rằng nếu phương trình sau có nghiệm:

$$(x + a)^2 + (x + b)^2 + (x + c)^2 = d^2,$$

thì: $3d^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2.$

10. Chứng minh rằng nếu phương trình:

$(x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 + (x + y + z)^2 = d^2$ có nghiệm thì $4d^2 \geq (a + b + c)^2.$

11. Chứng minh rằng phương trình:

$$-3x(x - 3y) = 7y^2 + z^2$$

chỉ có nghiệm duy nhất $x = y = z = 0.$

12. Chứng minh rằng nếu phương trình:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

có nghiệm $x = x_0$ thì

$$x_0^2 \leq 1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

13. a) Chứng minh rằng nếu phương trình:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

có nghiệm thì $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}; \quad (1)$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2$ để phương trình (1) có nghiệm;

c) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có nghiệm thì

$$2a^2 + b^2 \geq \frac{4}{3}.$$

14. Chứng minh rằng phương trình bậc ba:

$$x^3 + px + q = 0$$

có nghiệm duy nhất, khi và chỉ khi $4p^3 + 27q^2 > 0.$

15. Xác định m để phương trình:

$$x^3 - x^2 + 9mx - m = 0$$

có ba nghiệm đều dương.

16. Xác định các giá trị $m > 0$ sao cho phương trình sau có ba nghiệm:

$$3t^3 - t^2 + 27mt - m = 0.$$

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP

Chương IV

1.a), b) Biến đổi đưa về một tam thức bậc hai có $\Delta \leq 0$.

2.a) Sử dụng bất đẳng thức:

$$\begin{cases} \sin^3 x \leq \sin^2 x \\ \cos^3 x \leq \sin^2 x; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sin^3 x \leq \sin^2 x \\ \cos^3 x \leq \cos^2 x, \\ \sin^9 x \leq \sin^2 x, \\ \cos^9 x \leq \cos^2 x. \end{cases}$$

4. a) $|\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x| \leq 1$;

b) $|\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x| \leq 1$.

5. a) Vô nghiệm; b) Vô nghiệm.

6. a) Mọi x là nghiệm; b) Mọi x là nghiệm.

7. a) Ta có $2^{x^2} + 3^{x^2} + 4^{x^2} \geq 3 \geq 2 + 2x - x^x$;

$$b) \log_2(2 - x^2) \leq 1,$$

$$\log_3(3 - x^2) \leq 1,$$

$$\log_4(4 - x^2) \leq 1.$$

Cộng lại, ta được $\log_2(2 - x^2) + \log_3(3 - x^2) + \log_4(4 - x^2) \leq 3 \leq x^2 - 4x - 7$.

8. Dùng bất đẳng thức Bunhiacôski.

9. Tìm giá trị nhỏ nhất của vế trái.

10. Tìm giá trị nhỏ nhất của vế trái.

12. Nếu x_0 là nghiệm thì

$$x_0^4 = -ax_0^3 - bx_0^2 - cx_0 - d.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta được:

$$x_0^8 = (-ax_0^3 - bx_0^2 - cx_0 - d)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x_0^8 + x_0^4 + x_0^2 + 1) =$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \frac{x_0^8 - 1}{x_0^4 - 1}, \text{ khi } x_0^2 \neq 1.$$

Nếu $x_0^2 \leq 1$ thì bất đẳng thức đúng.

Xét $x_0^2 > 1$, khi đó:

$$\frac{x_0^8 - 1}{x_0^4 - 1} < \frac{x_0^8}{x_0^4 - 1} < \frac{x_0^8}{x_0^2 - 1},$$

thế vào (1) ta được

$$x_0^8 < (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \frac{x_0^8}{x_0^2 - 1}.$$

$$\text{Do vậy } x_0^2 < 1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

15. $m = \frac{1}{27}.$

16. Đưa về bài tập 15.

PHẦN THỨ BA
MỘT SỐ ĐỀ TOÁN TỰ LUYỆN TẬP

Đề số 1

I. Cho hàm số

$$y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m},$$

trong đó m là một tham số khác không.

a) Xác định m để tại giao điểm của đồ thị với trục hoành, tiếp tuyến với đồ thị song song với đường thẳng $y = x$, viết phương trình tiếp tuyến ấy.

b) Trên đường thẳng $x = 1$, hãy chỉ ra tất cả các điểm mà đồ thị không thể đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào.

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi, đồ thị của hàm số luôn luôn có hai tiếp tuyến cố định.

II. Cho chương trình lượng giác

$$\sin 3x - \sin 2x = m \sin x.$$

a) Giải phương trình với $m = 1$.

b) Với những giá trị nào của m , thì phương trình có nghiệm $x \neq k\pi$ (k nguyên)?

III. Giải bất phương trình

$$\frac{3x}{\sqrt{3x+10}} < \sqrt{3x+1} - 1.$$

IV. Cho tam giác đều ABC cạnh a trong mặt phẳng P, và d là đường thẳng vuông góc với P tại A, M là một điểm di động trên d.

a) Gọi K là hình chiếu vuông góc của C trên BM. Chứng minh rằng tích $BK \cdot BM$ là một đại lượng không phụ thuộc vào vị trí của M trên d.

b) Xác định M sao cho tứ diện KABC có thể tích lớn nhất.

c) Tìm quỹ tích trọng tâm tam giác MBC.

V. Gọi (x, y) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = a + 1, \\ x^2 + y^2 = 2a^2 - 2. \end{cases}$$

Xác định a sao cho tích xy lớn nhất.

Đề số 2

I. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 16x^2 - 9y^2 = 36, \\ \log_3(4x + 3y) - \log_3(4x - 3y) = 2. \end{cases}$$

II. Cho phương trình

$$\sin^4 x + \cos^4 x - \cos 2x + \frac{1}{4} \sin^2 2x + m = 0.$$

1) Giải phương trình ấy khi $m = -2$.

2) Biện luận phương trình đã cho.

III. Cho biểu thức:

$$x^2 + 2(a - 1)x + 3a^2 - 1. \quad (1)$$

1) Với giá trị nào của tham số a, biểu thức (1) (xem như một tam thức bậc hai đối với x) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $-1 < x_1 < 2 < x_2$.

2) Với giá trị nào của x, biểu thức (1) luôn dương với mọi giá trị của a.

IV. Cho trong một mặt phẳng P một đường tròn đường kính AE cố định. Trên đường thẳng vuông góc với P tại A, lấy một điểm S cố định. Xét hình chóp đỉnh S, đáy là tứ giác ABCD nội tiếp trong hình tròn đường kính AE, có các đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AE = 2R$, $AS = h$.

1) Tìm tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp của hình chóp đang xét.

2) Phải chọn đáy của hình chóp như thế nào để thể tích hình chóp lớn nhất. Tính thể tích trong trường hợp đó.

3) Chứng minh rằng trong trường hợp thể tích của hình chóp lớn nhất thì hình chóp có hình cầu nội tiếp. Tìm tâm và bán kính hình cầu nội tiếp đó.

V. Đáy của hình chóp ABCD là một tam giác đều BCD. Chứng minh rằng nếu $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{ADB}$ thì hình chóp ấy là đều.

Đề số 3

I. Cho hàm số

$$y = \frac{ax^2 + (4-b)x + 5}{2-bx},$$

trong đó a, b là những tham số.

1) Tìm a, b để đồ thị của hàm số đi qua điểm (1, 4); (-1, 2). Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số tương ứng.

2) Chứng minh rằng đồ thị của hàm đã cho luôn đi qua một điểm cố định với mọi giá trị của a và b.

II. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \\ \cos 2y + 3 \cos 2x = -1, \end{cases}$$

III. Giải và biện luận

$$1) x + \sqrt{x^2 - x} = a;$$

$$2) \sqrt{x-a} - \sqrt{x-2a} > \sqrt{x-3a}.$$

IV. Trong hình tứ giác SABC, cạnh $AB = a$, tất cả các góc phẳng của các góc tam diện đỉnh A, B đều bằng α .

1) D là một điểm chạy trên đoạn AB. Tại vị trí nào của D, diện tích của tam giác CSD nhỏ nhất. Tính diện tích ấy theo a, α .

2) Tính theo a, α chiều cao của hình tứ diện xuất phát từ đỉnh S.

V. Chứng minh rằng nếu với mọi x ta có:

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x \geq -1.$$

thì $a_1 + a_2 + a_3 \leq 3$.

Đề số 4

I. Cho hàm số

$$y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx - (m^3 - m^2 + 2)}{x - m}.$$

a) Xác định các giá trị của m , sao cho hàm số luôn luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

b) Xác định tiệm cận xiên của đồ thị. Chứng tỏ rằng tiệm cận xiên luôn luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

c) Chứng minh rằng với mọi điểm $A(x_0, y_0)$ cho trước trên mặt phẳng tọa độ, luôn luôn tìm được một giá trị thích hợp của m để đồ thị hàm số đi qua A.

II. a) Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có góc A vuông, thì

$$\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}. \quad (*)$$

b) Ngược lại, chứng minh rằng nếu trong tam giác ABC ta có hệ thức (*), thì tam giác ấy là vuông hay cân.

III. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+y)^x = (x-y)^y, \\ \log_2 x = 1 + \log_2 y. \end{cases}$$

IV. Trong mặt phẳng P, cho đường tròn tâm O, bán kính R và một điểm A cố định, với $OA = 2R$. Một đường thẳng thay đổi đi qua A, cắt đường tròn tại B và C. Đặt $\angle OAB = \alpha$. M là giao điểm của các tiếp tuyến với đường tròn tại B và C, và H

là hình chiếu của O trên BC.

a) Tính OH, AH, AB + AC theo R và α .

b) Hãy lập một phương trình bậc 2 có các nghiệm $x_1 = AB$, $x_2 = AC$. Các hệ số của phương trình phải thỏa mãn điều kiện gì?

c) Tìm quỹ tích của H khi α biến thiên. Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của M trên OA là một điểm cố định. Từ đó hãy suy ra quỹ tích của M.

V. Cho hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D', trong đó AA', BB', DD' là những cạnh song song và có kích thước AA' = a, AB = b, AD = c. Gọi P là mặt phẳng bất kỳ đi qua C', không cắt hình hộp, nhưng cắt các cạnh AA', AB, AD kéo dài tại E, F, G.

a) Chứng minh rằng

$$\frac{a}{AE} + \frac{b}{AF} + \frac{c}{AG} = 1.$$

b) Xác định mặt phẳng P sao cho tứ diện AEFG có thể tích nhỏ nhất.

Đề số 5

I. Cho hàm số

$$y = 2x^3 - 3(2a + 1)x^2 + 6a(a + 1)x + 1,$$

a là tham số.

1) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $a = 1$. Đường tiếp tuyến tại điểm nào của đồ thị song song với đường thẳng $y = 12x - 10$.

2) Chứng minh rằng hàm số đã cho luôn có cực đại và cực tiểu, tìm a để cho hàm số đạt giá trị cực đại lớn hơn 1.

II. 1) Giải phương trình

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{4}{5}.$$

2), Với giá trị nào của x và α ta có

$$\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos\alpha = 0$$

III. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + x + y = a + 2, \\ x^2 y + y^2 x = a + 1. \end{cases}$$

1) Giải hệ khi $a = -3$.

2) Biện luận hệ đã cho.

IV. Cho hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

1) Vẽ giao tuyến của hai mặt phẳng $(A_1 DC_1)$ và $(ABB_1 A_1)$.
Tính tang của góc giữa 2 mặt phẳng ấy.

2) Tính diện tích của thiết diện của hình lập phương, bởi mặt phẳng đi qua điểm giữa K của AD , điểm giữa H của DC và điểm I trên đoạn BB_1 , sao cho $B_1 I = 3IB$.

V. Chứng minh rằng với $a > 1$, ta có

$$a - \frac{1}{2a-1} < \sqrt{a^2 - 1} < a - \frac{1}{2a}.$$

Đề số 6

I. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8$.

a) Xác định m để đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành.

b) Chứng minh rằng trên parabol $y = x^2$, tồn tại ít nhất hai điểm mà đồ thị của hàm số không thể đi qua, dù m lấy bất cứ giá trị nào.

II. Giải phương trình: $\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x + \cot x$.

III. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = m, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21, \\ xz = y^2, m \text{ là tham số.} \end{cases}$$

1) Giải hệ khi $m = 7$.

2) Biện luận hệ đã cho.

IV. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$. Trên đường cao

SH của hình chóp lấy một điểm I. Chứng minh rằng trong các thiết diện tạo thành bởi mặt phẳng đi qua AI, thì thiết diện song song với BD có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích của thiết diện ấy, nếu I là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp và biết rằng cạnh bên của hình chóp bằng 1, góc ở đỉnh của hình chóp giữa hai cạnh bên đối diện bằng 2α , ($\pi \leq \pi/4$).

V. Cho một tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng không có điểm nào của tứ giác ấy nằm ngoài cả bốn vòng tròn đường kính AB, BC, CD, DA.

Đề số 7

I. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là:

$$\frac{a+b+c}{2} = a \cos A + b \cos B + c \cos C,$$

trong đó a, b, c là các cạnh lần lượt đối diện với các đỉnh A, B, C.

II. Tính

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{xa^2 - (x+1)a + 2}{a^2 + ax + x^2}.$$

Gọi giới hạn ấy là y(x). Vẽ đồ thị của hàm số y(x).

III. Tìm tham số m để cho hệ:

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq m, \\ x^2 - 2x - 3 \leq -6m \end{cases}$$

có một nghiệm duy nhất.

IV. Cho hình lập phương ABCDEFGH có cạnh bằng a;

1) Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh AE, BF,

CG sao cho $AM = \frac{3a}{4}$, $BN = \frac{a}{2}$, $CP = \frac{a}{3}$.

Hãy xác định giao điểm của mặt phẳng (MNP) với cạnh DH.

2) Gọi I là điểm giữa cạnh FG, J là điểm giữa cạnh GH.

Tìm bán kính của hình cầu đi qua điểm A, C, I, J.

V. Chứng minh rằng: nếu α là một số dương, m là một số nguyên dương, thì ta có:

$$(1 + \alpha)^n + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

Đề số 8

(Bạn đọc tự giải)

I. 1) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

2) Tìm a và b sao cho phương trình

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = 1 \text{ có hai nghiệm } x = 4 \text{ và } x = 5.$$

II. 1) Giải phương trình

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos x \cdot \cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x \cdot \cos 3x} = \frac{1}{\sin x}$$

2) Giả sử trong ΔABC ta có: $\sin \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$.

Chứng minh rằng $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$.

Hãy tìm một hệ thức liên hệ giữa các cạnh của tam giác.

III. Cho hàm số $y = \frac{x^2 \cos \alpha + 2x \cdot \sin \alpha + 1}{x - 2}$.

1) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $\alpha = 0$

2) Gọi h là khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng tiệm cận xiên. Chứng minh rằng $h \leq \sqrt{6}$.

IV. Trên ba tia Ox, Oy, Oz từng đôi một lập với nhau một góc α , lấy các điểm A, B, C với $OA = a, OB = b, OC = c$.

1) Tính thể tích tứ diện $OABC$ theo a, b, c, α .

2) Giả sử a, b, c cố định, còn α thay đổi ($0 < \alpha < 120^\circ$). Với giá trị

nào của α thì tứ diện OABC có thể tích lớn nhất.

V. Một mặt phẳng có thể cắt hình lập phương theo thiết diện là một ngũ giác đều được không?

LỜI GIẢI PHẦN CÁC ĐỀ TỰ LUYỆN

Đề số 1

I. a) Trước hết, xác định giao điểm của đồ thị với trục hoành:

$$\begin{cases} (3m+1)x - m^2 + m = 0, \\ x \neq -m; \end{cases}$$

$$\text{hay: } x = \frac{m^2 - m}{3m + 1}, \quad m \neq -\frac{1}{3}, \quad m \neq 0.$$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{4m^2}{(x+m)^2}. \text{ Để tiếp tuyến tại } x_1 = \frac{m^2 - m}{3m + 1}.$$

song song với đường thẳng $y = x$, thì phải có $y'(x_1) = 1$, hay:

$$\frac{4m^2}{\left(\frac{m^2 - m}{3m + 1} + m\right)^2} = 1.$$

$$\text{Giải phương trình này ta thu được } m = -1, m = -\frac{1}{5}.$$

Từ đó, ta nhận được hai giao điểm của đồ thị với trục hoành là $A_1(-1,0)$ và $A_2\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$.

Phương trình tiếp tuyến tại A_1 có dạng:

$$\frac{y-0}{x+1} = 1, \text{ hay } y = x + 1.$$

Phương trình tiếp tuyến tại A_2 có dạng:

$$\frac{y-0}{x-3/5} = 1, \text{ hay } y = x - \frac{3}{5}.$$

b) Mọi điểm trên đường thẳng $x = 1$ có dạng $A(1, y_0)$. Ta cần xác định y_0 sao cho đồ thị không bao giờ đi qua.

Khi đó $y_0 \neq \frac{(3m+1) \cdot 1 - m^2 + m}{m+1}$ ứng với mọi giá trị m ($m \neq -1$).

Nói cách khác, phương trình $y_0 = \frac{-m^2 + 4m + 1}{m+1}$ không có nghiệm.

Hay $m^2 + (y_0 - 4)m + y_0 - 1 = 0$ vô nghiệm.

$$1) \Delta < 0 \Leftrightarrow y_0^2 - 12y_0 + 20 < 0 \Leftrightarrow 2 < y_0 < 10.$$

$$2) \begin{cases} \Delta = 0 \\ m = -\frac{y_0 - 4}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 2, \text{ hoặc } y_0 = 10, \\ y_0 = 6 \text{ không xảy ra.} \end{cases}$$

Vậy $A(1, y_0)$ với $2 < y_0 < 10$ là các điểm cần tìm.

c) Ta cần chứng minh tồn tại hai đường thẳng cố định để đồ thị hàm số đã cho luôn luôn tiếp xúc với chúng.

Nếu $y = ax + b$ là đường thẳng cố định phải tìm, thì phương trình $\frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m} = ax + b$, hay: $ax^2 + [a - 3)m + (b - 1)]x + m^2 + (b - 1)m = 0$ phải có nghiệm kép, với mọi m .

$$\text{Suy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 & (a^2 - 10a + 9)m^2 + 2[(a - 3)(b - 1) - 2a(b - 1)]m + (b - 1)^2 = 0 \\ a \neq 0 & a \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a^2 - 10a + 9 = 0 \\ (a + 3)(b - 1) = 0 \\ (b - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, b = 1; \\ a = 9, b = 1. \end{cases}$$

Vậy $y = x + 1$ và $y = 9x + 1$ là các đường thẳng cố định (tiếp tuyến cố định) cần tìm.

II. a) Khi $m = 1$, thì phương trình có dạng:

$$\begin{aligned} & \sin 3x - \sin 2x = \sin x \\ \Leftrightarrow & (\sin 3x - \sin x) - \sin 2x = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\cos 2x \sin x - 2\sin x \cos x = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\sin x (\cos 2x - \cos x) = 0. \end{aligned}$$

$$* \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

$$* \cos 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow 2x = \pm x = 2k\pi.$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi, x = 2k\pi/3.$$

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (\sin 3x - \sin x) - 2\sin x \cos x + (1 - m)\sin x = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\cos 2x - 2\sin x \cos x + (1 - m)\sin x = 0 \\ \Leftrightarrow & \sin x (4\cos^2 x - 2\cos x - m - 1) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Khi đó, nếu phương trình (1) có nghiệm, thì nghiệm đó sẽ khác $k\pi$.

Đặt $\cos x = t$; $-1 \leq t \leq 1$, và xét

$$f(t) = 4t^2 - 2t - m - 1 = 0,$$

$$\Delta' = 1 + 4(m + 1) = 4m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{4}. \quad (2)$$

Giả sử điều kiện (2) được thoả mãn. Khi đó

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{\Delta'}{4} \leq 0$$

Vậy điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là:

$$f(-1) > 0, \text{ tức là } 4 + 2 \cdot m - 1 > 0 \Leftrightarrow m < 5,$$

$$\text{Kết hợp: } -\frac{5}{4} \leq m < 5.$$

Đáp số: Khi $-\frac{5}{4} \leq m < 5$, thì phương trình đã cho có nghiệm $x \neq k\pi$.

$$\text{III. Giải bất phương trình } \frac{3x}{\sqrt{3x+10}} < \sqrt{3x+1} - 1.$$

Điều kiện

$$\begin{cases} 3x+10 > 0, \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{10}{3} \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$3x < (\sqrt{3x+1}-1)\sqrt{3x+10}$$

$$\text{hay } (3x+1)(-1 < (\sqrt{3x+1}-1)\sqrt{3x+10})$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-1)(\sqrt{3x+1}+1-\sqrt{3x+10}) < 0.$$

Trường hợp 1: Khi $-\frac{1}{3} \leq x < 0$, thì $\sqrt{3x+1}-1 < 0$.

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\sqrt{3x+1}+1-\sqrt{3x+10} > 0.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1}+1-\sqrt{3x+10} &< \\ &< 1+1-\sqrt{3(-\frac{1}{3})+10} < 0. \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: Khi $x > 0$, thì $\sqrt{3x+1}-1 > 0$.

$$\text{Suy ra: } \sqrt{3x+1}+1-\sqrt{3x+10} < 0.$$

$$\text{hay } \sqrt{3x+1}+1 < \sqrt{3x+10}.$$

Bình phương hai vế, ta được:

$$3x+2+2\sqrt{3x+1} < 3x+10,$$

$$\text{hay } 2\sqrt{3x+1} < 8, \text{ hay } 3x+1 < 16,$$

$$\text{hay } x < 5.$$

Kết hợp lại, ta có $0 < x < 5$.

IV. a) Gọi E là điểm giữa AB. Do tam giác ABC đều nên

$$\left. \begin{array}{l} CE \perp AB \\ CE \perp MA \end{array} \right\} \Leftrightarrow CE \perp [MAB] \text{ (hình 48).}$$

$$\text{V.} \quad \begin{cases} x + y = a + 1, \\ x^2 + y^2 = 2a^2 - 2. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } 2xy &= (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = \\ &= (a + 1)^2 - (2a^2 - 2) = -a^2 + 2a + 3. \end{aligned}$$

Vậy ta được hệ:

$$\begin{cases} x + y = a + 1, \\ xy = \frac{1}{2}(-a^2 + 2a + 3). \end{cases} \quad (2)$$

Điều kiện để hệ (1) hoặc (2) có nghiệm là phương trình bậc hai $t^2 - (a + 1)t + \frac{1}{2}(-a^2 + 2a + 3) = 0$ phải có nghiệm:

$$\begin{aligned} \Delta &= (a + 1)^2 - 2(-a^2 + 2a + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \frac{5}{3}, \\ a \leq -1. \end{cases} \\ &= 3a^2 - 2a - 5 \geq 0 \end{aligned}$$

Xét tam thức bậc hai:

$$f(a) = \frac{1}{2}(-a^2 + 2a + 3), \text{ đồ thị của nó có đỉnh tại } a = 1.$$

Vậy trong khoảng $(\frac{5}{3} + \infty)$, hàm số $f(a)$ nghịch biến, còn trong khoảng $(-\infty, -1)$, hàm số $f(a)$ đồng biến. Từ đó suy ra:

$$\max(xy) = \max\{f(\frac{5}{3}), f(-1)\}.$$

$$f(\frac{5}{3}) = \frac{16}{9}; f(-1) = 0.$$

Vậy $\max(xy) = \frac{16}{9}$, giá trị lớn nhất đó đạt được khi:

$$a = \frac{5}{3}; x = \frac{a + 1}{2} = \frac{4}{3}; y = \frac{4}{3}.$$

Đề số 2

I. Điều kiện để các biểu thức có nghĩa là:

$$\begin{cases} 4x + 3y > 0, \\ 4x - 3y > 0. \end{cases}$$

Với điều kiện (1) hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} (4x + 3y)(4x - 3y) = 36, \\ \frac{4x + 3y}{4x - 3y} = 9. \end{cases} \quad (2)$$

Chia hai phương trình vế với vế ta được

$$\begin{cases} (4x - 3y)^2 = 4, \\ \frac{4x + 3y}{4x - 3y} = 9. \end{cases} \quad (3)$$

Từ (1) và (2), ta có:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 2, \\ 4x + 3y = 18. \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{5}{2}, y = \frac{8}{3}$ là nghiệm của hệ

II. 1) Phương trình đã cho có thể rút gọn và viết dưới dạng:

$$\cos^2 2x - 4\cos 2x + (4m + 3) = 0. \quad (1)$$

Khi $m = -2$, (1) có dạng:

$$\cos^2 2x - 4\cos 2x - 5 = 0, \text{ hay } \cos 2x = -1 \text{ và } \cos 2x = 5;$$

vì $|\cos 2x| \leq 1$, nên $\cos 2x = 5$ bị loại.

Còn $\cos 2x = -1$, cho nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, (k là số nguyên).

2) Biện luận phương trình (1). Đặt $\cos 2x = t$, ta được:

$$t^2 - 4t + (4m + 3) = 0, (2); (-1 \leq t \leq 1). \quad (3)$$

Ta cần xét các giá trị của m để (2) có nghiệm thỏa mãn điều kiện (3). Vì khi (2) có nghiệm là t_1 và t_2 , ta có $t_1 + t_2 = 4$, nên nhiều nhất cũng chỉ có một nghiệm thỏa mãn (3). Vậy để (2) có nghiệm thỏa mãn (3), ta cần có:

$$f(-1)f(1) \leq 0, \text{ với } f(t) = t^2 - 4t + (4m + 3), \text{ hay}$$

$$16m(m + 2) \leq 0, \text{ hay } -2 \leq m \leq 0.$$

Nếu $m = -2$ đã xét ở trên: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Nếu $m = 0$, $\cos 2x = t = 1$, hay $x = 2k\pi$.

Nếu $-2 < m < 0$, thì nghiệm là $t = 2 - \sqrt{1 - 4m}$.

Ta đặt $\cos \alpha = 2 - \sqrt{1 - 4m}$, ($0 < \alpha < \pi$).

Khi đó, ta có $\cos 2x = \cos \alpha$

$x_{1,2} = \pm \frac{\alpha}{2} + k\pi$. Các giá trị k là nguyên.

III. 1) Gọi $f(x) = x^2 + 2(a - 1)x + 3a^2 - 1$. Muốn cho tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$-1 < x_1 < 2 < x_2 \quad (2)$$

thì, vì hệ số đầu của tam thức bằng 1, ta phải có

$$\begin{cases} f(-1) = 3a^2 - 2a + 2 > 0, \\ f(2) = 3a^2 + 4a - 1 < 0. \end{cases}$$

Bất phương trình đầu được thỏa mãn với mọi a , bất phương trình sau được thỏa mãn khi

$$\frac{-2 - \sqrt{7}}{3} < a < \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$$

Vậy các giá trị phải tìm của a là

$$\frac{-2 - \sqrt{7}}{3} < a < \frac{-2 + \sqrt{7}}{3}$$

2) Ta viết biểu thức đã cho dưới dạng tam thức bậc hai đối với a :

$$g(a) = 3a^2 + 2ax + (x^2 - 2x - 1).$$

$$\text{Biệt thức } \Delta'_1 = x^2 - 3(x^2 - 2x - 1) = -2x^2 + 6x + 3.$$

Muốn biểu thức luôn dương với mọi giá trị a ta phải có

$$\Delta'_1 < 0, \text{ hay } x < \frac{3 - \sqrt{15}}{2} \text{ hoặc } x > \frac{3 + \sqrt{15}}{2}.$$

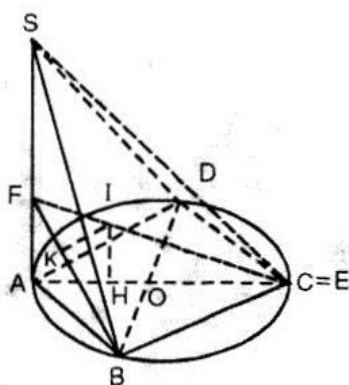
IV.1) Tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp SABCD là giao điểm của đường vuông góc tại O với mặt phẳng P (O là tâm đường tròn đường kính AE đã cho) và đường trung trực của SA trong mặt phẳng (SAE). Bán kính hình cầu đó là

$$R_1 = O_1A = \sqrt{OO_1^2 + AO^2} \\ = \sqrt{\frac{h^2}{4} + R^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 + h^2}.$$

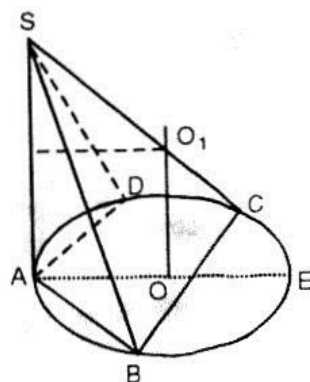
$$2) \text{ Ta có } V = \frac{1}{3} S_d \cdot h = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{6} AC \cdot BD \cdot SA.$$

Muốn V lớn nhất thì chỉ cần AC.BD là lớn nhất (vì SA không đổi). Muốn vậy AC và BD phải là hai đường kính vuông góc với nhau ($C \equiv E$).

$$\text{Khi đó } V = \frac{1}{6} (2R)^2 \cdot h = \frac{2}{3} R^2 h.$$



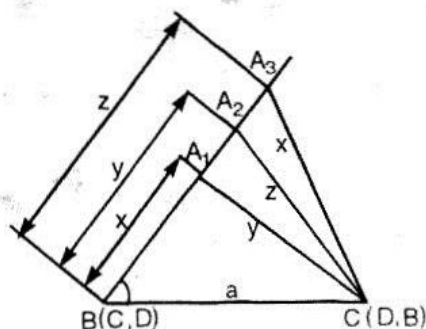
Hình 50



Hình 49

3) Dễ thấy B và D đối xứng với nhau qua mặt phẳng (SAE). Do đó mặt phẳng (SAE) là mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh SA và nhị diện cạnh SE. Ta cũng có $AB \perp BE$, nên $SB \perp BE$; từ đó $\widehat{SBA}$ là góc phẳng nhị diện cạnh BE. Vẽ phân giác BF của góc $\widehat{SBA}$. $F \in SA$, thì EF là giao tuyến của các mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh SA, SE

V. Đặt $AB = x$, $AC = y$, $AD = z$, $BC = CD = DB = a$, $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{ADB} = \alpha$ (hình 51). Ta chỉ cần chứng minh $x = y = z$ là đủ.



Hình 52

Tách các mặt ABC , ACD và ADB , rồi sắp xếp chúng sao cho $BC \equiv CD \equiv DB$ trong cùng mặt phẳng và các tia BA , CA , DA trùng nhau, như hình 52, ở đây:

$$A_1B = x = CA_3,$$

$$A_2B = y = CA_1,$$

$$BA_3 = z = CA_2.$$

Ta thấy nếu có 2 đoạn bằng nhau thì cả ba đoạn bằng nhau.

Chẳng hạn nếu $x = y$, thì $x = y = z$, vì khi đó:

$$A_1 \equiv A_2.$$

Giả sử $x < y < z$.

Xét $\triangle CA_2A_3$, ta có $CA_2 < A_2A_3 + A_3C$,

hay $z < z - y + x$, hay $x > y$, vô lý. Vậy ta luôn luôn có $x = y = z$. Từ đó suy ra hình chóp là hình chóp đều.

Đề số 3

I.1) Để đồ thị của hàm số đi qua hai điểm $(1; 4)$ và $(-1; 2)$

$$\text{ta phải có: } \begin{cases} 4 = \frac{a + (4 - b) + 5}{2 - b}, \\ 2 = \frac{a - (4 - b) + 5}{2 + b}; \end{cases} \quad b \neq \pm 2;$$

$$\text{hay: } \begin{cases} a + 3b = -1, \\ a - b = 3; \end{cases} \quad b \neq \pm 2;$$

hay $a = 2$, $b = -1$, thỏa mãn $b \neq \pm 2$.

Phần khảo sát và vẽ đồ thị xin dành cho bạn đọc.

2. Ta thấy rằng đồ thị luôn đi qua điểm cố định $x = 0$, $y = \frac{5}{2}$,
với mọi giá trị của a và b , mà

$$4a + 8b + 3b^2 \neq 0.$$

II. Giải hệ

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2y + \sqrt{3} \cos 2x = -1. & (2) \end{cases}$$

Điều kiện để phương trình có nghĩa

$$x, y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi. \quad (3)$$

Hai vế của (1) không thể đồng thời bằng 0, vì nếu vậy, từ điều kiện $\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = 0$, ta suy ra $1 + \operatorname{tg}^2 x = 0$, vô lý. Do đó chia hai vế của (1) cho vế phải ta được

$$\operatorname{tg} (y - x) = 1.$$

Vậy $y - x = \pi/4 + k\pi$, k nguyên $\Rightarrow y = x + \pi/4 + k\pi$, hay $2y = 2x + \pi/2 + 2k\pi$.

Từ đó $\cos 2y = -\sin 2x$. Vậy (2) có thể viết lại dưới dạng

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 1.$$

Chia hai vế cho 2, ta được

$$\cos \frac{\pi}{3} \sin 2x - \sin \frac{\pi}{3} \cos 2x = \sin \frac{\pi}{6} \text{ hay}$$

$$\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{6}. \text{ Từ đó}$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2m\pi;$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi; \quad l, m \text{ nguyên.}$$

$$\text{Vậy } x_1 = \frac{\pi}{4} + m\pi, \quad y_1 = \frac{\pi}{2} + p\pi, \quad p \text{ nguyên;}$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{12} + l\pi, y_2 = \frac{5\pi}{6} + q\pi, q \text{ nguyên.}$$

So với điều kiện (3), hệ chỉ có nghiệm :

$$\begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + l\pi, \\ y = \frac{5\pi}{6} + q\pi; l, q \text{ nguyên.} \end{cases}$$

$$\text{III. 1) } x + \sqrt{x^2 - x} = a \quad (1)$$

$$\text{Hay } \sqrt{x^2 - x} = a - x \quad (2)$$

Điều kiện để phương trình có nghĩa :

$$\begin{cases} x \leq 0, x \geq 1 \\ x \geq a. \end{cases}$$

Với điều kiện đó, bình phương hai vế của (2), ta được :

$$x^2 - x = a^2 - 2ax + x^2$$

$$\text{hay } (2a - 1)x = a^2$$

Nếu $2a - 1 = 0$ hay $a = \frac{1}{2}$, thì phương trình vô nghiệm.

$$\text{Nếu } 2a - 1 \neq 0, \text{ hay } a \neq \frac{1}{2}, \text{ thì } x = \frac{a^2}{2a-1}. \quad (3)$$

Muốn (3) là nghiệm ta phải có :

$$\begin{cases} \frac{a^2}{2a-1} \leq 0 \text{ hoặc } \frac{a^2}{2a-1} \geq 1, \\ \frac{a^2}{2a-1} \leq a. \end{cases}$$

Nếu $2a - 1 < 0$ hay $a < \frac{1}{2}$, thì chỉ cần có $a^2 \geq 2a^2 - a$, hay

$a^2 - a \leq 0$, hay $0 \leq a \leq 1$. Vậy khi $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, thì (3) là nghiệm.

Nếu $2a - 1 > 0$, hay $a > \frac{1}{2}$, thì phải có :

$$\begin{cases} a^2 \geq 2a - 1, \\ a^2 \leq 2a^2 - a; \end{cases}$$

Hay $\begin{cases} a^2 - 2a + 1 \geq 0 & (\text{luôn được thỏa mãn}); \\ a^2 - a \geq 0, & \text{hay } a \leq 0 \text{ hoặc } a \geq 1. \end{cases}$

Vậy khi $a \geq 1$, thì (3) là nghiệm.

Kết luận :

Nếu $a < 0$, hoặc $\frac{1}{2} \leq a < 1$, thì phương trình vô nghiệm,

Nếu $0 \leq a < \frac{1}{2}$ hoặc $a \geq 1$, thì nghiệm $x = \frac{a^2}{2a-1}$.

$$2) \sqrt{x-a} - \sqrt{x-2a} > \sqrt{x-3a} \quad (4)$$

$$\text{tương đương với } \sqrt{x-2a} + \sqrt{x-3a} < \sqrt{x-a}. \quad (5)$$

Điều kiện để bất phương trình có nghĩa :

$x \geq 3a$ (nếu $a \geq 0$) hoặc $x \geq a$ (nếu $a < 0$).

Bình phương hai vế của phương trình (5) ta được

$$2\sqrt{(x-2a)(x-3a)} < 4a - x. \quad (6)$$

Muốn bất phương trình có nghiệm ta còn phải có điều kiện $x < 4a$. Điều đó chứng tỏ a chỉ có thể dương (vì nếu $a \leq 0$ thì điều kiện $a \leq x < 4a$ không thể thỏa mãn). Vậy điều kiện chung là $a > 0$; $3a \leq x < 4a$.

Bình phương hai vế của (6) ta được :

$$3x^2 - 12ax + 8a^2 < 0,$$

$$\text{hay } \frac{6-2\sqrt{3}}{3}a < x < \frac{6+2\sqrt{3}}{3}a.$$

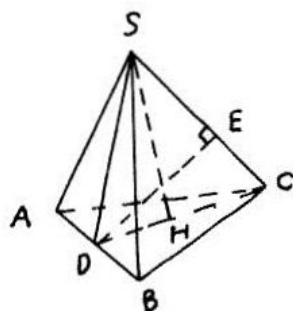
Kết hợp với điều kiện trên ta được :

$$3a \leq x < \frac{6+2\sqrt{3}}{3}a. \text{ } a \text{ là nghiệm với } a > 0.$$

IV. 1) Diện tích của tam giác SCD nhỏ nhất khi và chỉ khi đường cao DE là nhỏ nhất, (vì SC không đổi), hay DE là đường vuông góc chung của AB và SC. Vì tam giác SAB và tam giác CAB là các tam giác cân, chung đáy AB nên khi chọn D là điểm giữa của AB, ta có $AB \perp (SDC)$.

Nếu hạ $DE \perp SC$, thì DE là đường vuông góc chung của AB và SC.

Ta có tam giác SAB bằng tam giác CAB, nên $CD = SD = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$; tam giác DSC cân,



Hình 53

nên E là điểm giữa của SC ; tam giác BSC cân nên

$$SB = SC = \frac{a}{2 \cos \alpha}, \text{ do đó } CE = BC \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha};$$

$$\text{từ đó ta có : } DE = \sqrt{CD^2 - EC^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{a^2 \sin^2(\frac{\alpha}{2})}{4 \cos^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{a}{2 \cos \alpha} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2} - \sqrt{2 \cos \alpha + 1}}{2 \cos \alpha}$$

$$\text{Vậy } s(\text{CSD}) = \text{CD} \cdot \text{DE} = \frac{a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{2 \cos \alpha + 1}}{4 \cos^2 \alpha}.$$

2) Trong tam giác SCD vẽ đường cao SH ($\text{SH} \perp \text{DC}$). Mặt khác theo chứng minh trên ta có : $\text{AB} \perp (\text{SCD})$, nên $\text{AB} \perp \text{SH}$. Vậy SH là chiều cao của hình chóp SABC. Vậy SH là đường cao của hình tứ diện xuất phát từ S (xem hình 53).

$$\text{Vì } s(\text{CSD}) = \frac{1}{2} \text{DC} \cdot \text{SH}, \text{ nên } \text{SH} = \frac{2s(\text{CSD})}{\text{CD}},$$

$$\begin{aligned} \text{SH} &= \frac{a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{2 \cos \alpha + 1}}{2 \cos^2 \alpha \cdot \frac{a}{2} \text{tg} \alpha} = \\ &= \frac{2a \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{2 \cos \alpha + 1}}{\sin 2\alpha} \end{aligned}$$

V. Vì $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x > -1$, (1) với mọi x , nên lần lượt thay $x = -\pi/2, \pi/2$ và π vào (1), ta được :

$$0 - a_2 + 0 \geq -1,$$

$$0 - a_2 + 0 \geq -1,$$

$$-a_1 + a_2 - a_3 \geq -1,$$

Cộng ba bất đẳng thức đó lại, ta được :

$$-a_1 - a_2 - a_3 \geq -3,$$

$$\text{hay : } a_1 + a_2 + a_3 \leq 3.$$

ĐỀ SỐ 4

I. a) Ta có thể viết hàm số đã cho dưới dạng

$$y = (m+1)x + m^2 - m - \frac{2}{x-m}.$$

Để hàm số luôn luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó, thì phải có $y' < 0$ trên các khoảng đó :

$$y' = m + 1 + \frac{2}{(x - m)^2} < 0, \text{ với mọi } x \neq m,$$

hay $(m + 1)(x - m)^2 + 2 < 0$, với mọi $x \neq m$;

1) Khi $m = -1$, thì $2 > 0$;

2) Khi $m > -1$, thì $(m + 1)(x - m)^2 + 2 > 0$ với mọi x .

3) Khi $m < -1$, thì phương trình $(m + 1)(x - m)^2 + 2 = 0$ sẽ có hai nghiệm ; nên trong khoảng hai nghiệm sẽ có :

$$(m + 1)(x - m)^2 + 2 > 0.$$

Vậy không tồn tại m để hàm số luôn luôn nghịch biến.

b) Tiệm cận xiên của đồ thị có dạng $y = (m + 1)x + m^2 - m$.

Giả sử $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là parabol cố định cần tìm. Khi đó, phương trình :

$$ax^2 + bx + c = (m + 1)x + m^2 - m,$$

$$\text{hay } ax^2 + (b - 1 - m)x + c + m - m^2 = 0,$$

phải có nghiệm kép với mọi m .

Suy ra $\Delta = (b - 1 - m)^2 - 4a(c + m - m^2) = 0$, với mọi m , hay $(1 + 4a)m^2 - 2(b - 1 + 2a)m + (b - 1)^2 - 4ac = 0$ với mọi m .

$$\text{Vậy phải có : } \begin{cases} 1 + 4a = 0 \\ b - 1 + 2a = 0 \\ (b - 1)^2 - 4ac = 0. \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ này ta thu được } a = -\frac{1}{4}, b = \frac{2}{3}, c = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy parabol cố định là } y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}.$$

c) Ta cần chứng minh rằng phương trình (ẩn m)

$$y_0 = (m + 1)x_0 + m^2 - m - \frac{2}{x_0 - m}$$

luôn luôn có nghiệm với mọi cặp x_0, y_0 cho trước.

$$\text{hay } [m^2 + (x_0 - 1)m + x_0 - y_0] (x_0 - m) - 2 = 0, \quad (1)$$

có nghiệm $m \neq x_0$.

Nhận xét rằng (1) là phương trình bậc ba nên bao giờ nó cũng có nghiệm và $m = x_0$ không phải là nghiệm của (1).

II. a) Nếu $A = 90^\circ$, thì $B + C = 90^\circ$, ta suy ra

$$\operatorname{tg} C = \cot B; \sin C = \cos B.$$

Vậy đẳng thức phải chứng minh tương đương với đẳng thức:

$$\frac{\operatorname{tg} B}{\cot B} = \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B}, \text{ hay } \operatorname{tg}^2 B = \operatorname{tg}^2 B, \text{ luôn luôn đúng.}$$

b) Nếu có $\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$, thì ta có thể viết nó dưới dạng:

$$\frac{\cos C}{\cos B} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

Từ đó suy ra

$$\sin 2B = \sin 2C.$$

Vậy, hoặc $2B = 2C$, tức là $B = C$;

hoặc $2B = 180^\circ - 2C$, tức là $B + C = 90^\circ$.

$$\text{III. } \begin{cases} (x + y)^x = (x - y)^y, \\ \log_2 x = 1 + \log_2 y. \end{cases}$$

Điều kiện: $x > 0$; $y > 0$; $x > y$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra:

$$\log_2 x = \log_2 (2y), \text{ hay } x = 2y.$$

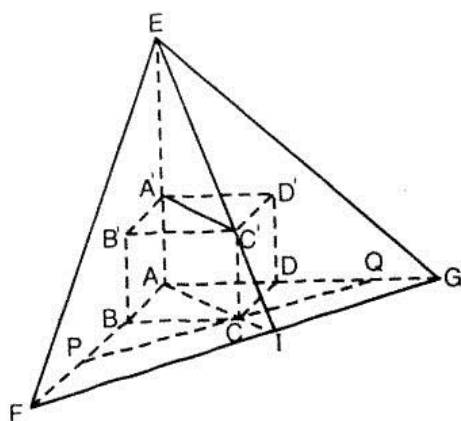
Thay vào phương trình đầu:

$$(3y)^{2y} = y^y.$$

$$\text{Hay } (9y)^y = 1.$$

$$AI.AO = AB.AC = 3R^2 \Rightarrow AI = \frac{3R}{2}, \text{ vậy } I \text{ cố định, } M \text{ nằm}$$

trên đường thẳng vuông góc với AO tại I - là đường M_1M_2 . Do M phải nằm ngoài đường tròn đã cho nên loại đoạn M_1M_2 . Quỹ tích là hai tia.



Hình 55

V. (Hình 55)

a) Dễ thấy EC' và AC phải cắt nhau tại I thuộc FG ; qua C kẻ $PQ//FG$ (P trên AF , Q trên AG)

$$\frac{AP}{AF} = \frac{AQ}{AG} = \frac{AC}{AI}$$

ta có :

$$\begin{aligned} \frac{a}{AE} + \frac{b}{AF} + \frac{c}{AG} &= \\ &= \frac{AA'}{AE} + \frac{AB}{AF} + \frac{AD}{AG} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{AA'}{AE} + \frac{AB}{AP} \cdot \frac{AP}{AF} + \frac{AD}{AQ} \cdot \frac{AQ}{AG} = \\ &= \frac{AA'}{AE} + \frac{AC}{AI} \left(\frac{AB}{AP} + \frac{AD}{AQ} \right) = \frac{AA'}{AE} + \frac{AC}{AI} = 1, \end{aligned}$$

Vi

$$\frac{AB}{AP} + \frac{AD}{AQ} = \frac{CD}{AP} + \frac{AD}{AQ} = \frac{DQ}{AQ} + \frac{AD}{AQ} = 1,$$

$$\text{b. } v(AEFG) = \frac{1}{6} AE.AF.AG$$

$$1 = \frac{a}{AE} + \frac{b}{AF} + \frac{c}{AG} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{abc}{AE.AF.AG}}$$

Suy ra $AE \cdot AF \cdot AG \geq 27abc$, hay $v(AEFG) \geq \frac{1}{6} 27abc = \frac{9}{2} abc$.

Thể tích nhỏ nhất đạt được khi:

$$\frac{a}{AE} = \frac{b}{AF} = \frac{c}{AG} = \frac{1}{3}. \text{ Suy ra } \begin{cases} AE = 3a, \\ AF = 3b, \\ AG = 3c. \end{cases}$$

Mặt phẳng đi qua 3 điểm E, F, G này rõ ràng là phải đi qua C'.

$$v_{\min} = 4,5abc.$$

Đề số 5

I. 1) Khi $a = 1$, ta có $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$.

Phần khảo sát và vẽ đồ thị bạn đọc tự giải.

Giả sử $y = bx + c$ là đường tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 12x - 10$. Khi đó:

$y'(x_0) = b = 12 = 6x_0^2 - 18x_0 + 12$ (x_0 là hoành độ của tiếp điểm của $y = bx + c$ với đồ thị). Từ đó suy ra hai giá trị của x_0 là $x_0 = 0$ và $x_0 = 3$.

Khi đó $y(0) = 1$ và $y(3) = 10$, (các tung độ tương ứng).

2) Ta có với mọi a

$$y' = 6x^2 - 6(2a + 1)x + 6a(a + 1).$$

Vì $\Delta > 0$, nên tam thức bậc hai đó luôn luôn có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = a$ và $x_2 = a + 1$, vậy $x_1 \neq x_2$ với mọi a .

Tam thức y' triệt tiêu và đổi dấu khi x đi qua x_1 và x_2 . Từ đó suy ra hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu.

Dễ dàng thấy rằng hàm số đạt cực đại tại $x = a$ và cực tiểu tại $x = a + 1$. Vậy hàm số đạt giá trị cực đại lớn hơn 1 nếu $2a^3 - 3a^2(2a + 1) + 6a^2(a + 1) + 1 > 1$, hay

$$a^2(2a + 3) > 0 \text{ hay } -\frac{3}{2} < a \neq 0.$$

II. 1) Ta biến đổi vế trái

$$\begin{aligned}\sin x \sin 2x \sin 3x &= -\sin 2x \left(\frac{\cos 4x - \cos 2x}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{\sin 2x \cos 4x}{2} = \frac{1}{4} [\sin 4x - (\sin 6x + \sin(-2x))] \leq \\ &\leq \frac{3}{4} < \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2) Điều kiện để các hàm có nghĩa: $x > 0$ và $x \neq 1$.

Vì $\log_2 x \log_x 2 = 1$, nên khi đặt $\log_2 x = t$, ta được :

$$\begin{aligned}t + \frac{1}{t} + 2\cos\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 + 2t\cos\alpha + 1 &= 0. \quad (1)\end{aligned}$$

$\Delta' = \cos^2\alpha - 1 \leq 0$. Vậy phương trình (1) chỉ có nghiệm khi $\cos\alpha = \pm 1$, khi đó

nếu $\cos\alpha = 1$, (1) có dạng :

$$(t+1)^2 = 0, \text{ vậy } t = -1, \text{ hay } x = \frac{1}{2};$$

nếu $\cos\alpha = -1$, (1) có dạng :

$$(t-1)^2 = 1, \text{ vậy } t = 1, \text{ hay } x = 2.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = (2k_1 + 1)\pi; \\ x_2 = 2, \alpha_2 = 2k_2\pi; \end{cases} \quad (k_1, k_2 \text{ là các số nguyên}).$$

III. 1) Ta cần giải hệ:

$$\begin{cases} xy + x + y = -1, \\ x^2y + xy^2 = -2. \end{cases} \quad (2)$$

Đặt $u = x + y$, $v = xy$, từ (2) ta có :
$$\begin{cases} u + v = -1, \\ uv = -2. \end{cases}$$

Vậy u và v là nghiệm của phương trình

$$X^2 + X - 2 = 0.$$

Ta có: $u = 1$ và $v = -2$ hoặc $u = -2$ và $v = 1$.

Nếu
$$\begin{cases} u = 1, \\ v = -2, \end{cases}$$
 thì x và y là nghiệm của phương trình

$$Y^2 - Y - 2 = 0.$$

Khi đó nghiệm là
$$\begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 2, \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

Nếu
$$\begin{cases} u = -2, \\ v = 1, \end{cases}$$
 thì x và y là nghiệm của phương trình

$Z^2 + 2Z + 1 = (Z + 1)^2 = 0$, hay nghiệm cần tìm là $x = y = -1$.

Vậy hệ (2) có các nghiệm như sau :

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = -1. \end{cases}$$

2) Biện luận hệ

$$\begin{cases} xy + x + y = a + 2, \\ x^2y + xy^2 = a + 1. \end{cases} \quad (3)$$

Ta ký hiệu :
$$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = v. \end{cases}$$

Khi đó hệ (3) có dạng :
$$\begin{cases} u + v = a + 2, \\ uv = a + 1. \end{cases} \quad (4)$$

Vậy u và v là nghiệm của phương trình :

$$X^2 - (a + 2)X + (a + 1) = 0. \quad (5)$$

$$\Delta = (a + 2)^2 - 4(a + 1) = a^2 + 4a + 4 - 4a - 4 = a^2 \geq 0.$$

Phương trình (5) luôn luôn có nghiệm.

a) Nếu $a = 0$, ta có biệt thức $\Delta = 0$, nên (5) có nghiệm kép $u = v = 1$. Khi đó x và y sẽ là nghiệm (nếu có) của phương trình:

$$Y^2 - Y + 1 = 0.$$

Nhưng phương trình này vô nghiệm. Vậy hệ xuất phát (4) cũng vô nghiệm.

b) Nếu $a \neq 0$, thì phương trình (5) có hai nghiệm là $a + 1$ và 1 .

Nếu $u = a + 1$ và $v = 1$, thì x và y sẽ là nghiệm (nếu có) của phương trình:

$$Y^2 - (a + 1)Y + 1 = 0.$$

Phương trình này chỉ có nghiệm khi $(a + 1)^2 - 4 \geq 0$, hay khi $a \leq -3$ hoặc $a \geq 1$.

Nếu $u = 1$ và $v = a + 1$, thì x và y sẽ là nghiệm (nếu có) của phương trình:

$$Y^2 - Y + a + 1 = 0.$$

Phương trình này có nghiệm khi biệt thức $\Delta = 1 - 4(a + 1) = - (4a + 3) \geq 0$, hay khi $a \leq -\frac{3}{4}$.

Tóm lại:

Khi $a \geq 1$ thì hệ (4) có hai nghiệm.

Khi $a = 1$, hệ (4) có một nghiệm.

Khi $a = -\frac{3}{4}$, hệ (4) có một nghiệm.

Khi $-3 < a < -\frac{3}{4}$, hệ (4) có hai nghiệm.

Khi $a = -3$, hệ (4) có ba nghiệm.

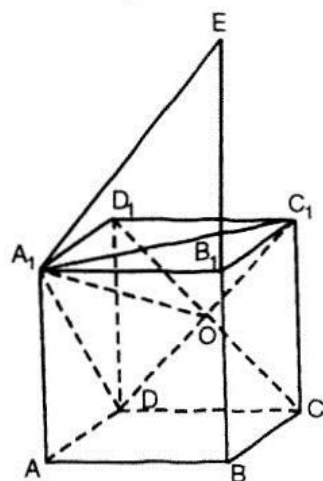
Khi $a < -3$, hệ (4) có bốn nghiệm.

IV. 1) Kéo dài BB_1 một đoạn $B_1E = A_1B_1$, nối A_1E . Khi đó $A_1E \parallel AB_1$, $= DC_1$, vì vậy A_1E thuộc mặt phẳng (A_1DC_1) . Vậy giao tuyến của (A_1DC_1) và (AA_1B_1B) là đường thẳng A_1E .

Vì $(DD_1C_1C) \parallel (AA_1B_1B)$ nên góc tạo bởi (A_1DC_1) và (DD_1C_1C) bằng góc tạo nên bởi (A_1DC_1) với (DD_1C_1C) .

Ta có $CD_1 \perp DC_1$ và $A_1D_1 \perp (DD_1C_1C)$; vậy $A_1O \perp DC_1$ (định lý ba đường vuông góc), nên $\widehat{A_1OD_1}$ là góc giữa hai mặt phẳng (A_1DC_1) và (DD_1C_1C) :

$$\operatorname{tg} \widehat{A_1OD_1} = \frac{A_1D_1}{D_1O} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}.$$

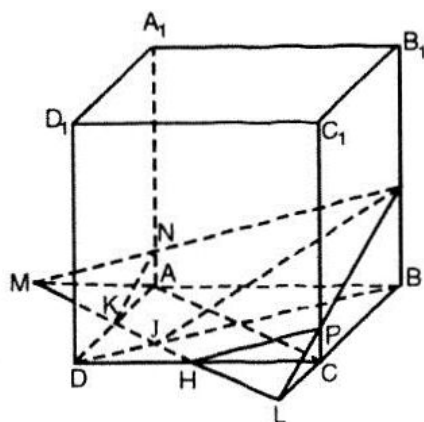


Hình 56

2. Kéo dài KH cắt BC tại L và AB tại M. Nối IL cắt CC_1 tại P, nối MI cắt AA_1 tại N. Vậy thiết diện cần tính diện tích là đa giác KHPIN.

KH là đường trung bình của tam giác DAC, nên $KH \parallel AC$, vì vậy $KH \perp JB$. KH cắt BD tại J.

Nếu nối IJ, ta có $IJ \perp KH$, (định lý ba đường vuông góc). Vậy BIJ là góc giữa thiết diện KHPIN với đáy ABCD.



Hình 57

Hình chiếu của đa giác

KHPIN lên (ABCD) là đa giác KHCBA. Vậy diện tích S của KHPIN thỏa mãn hệ thức

$$S = \frac{S_1}{\cos \widehat{BIJ}}, \text{ (S là diện tích của KHCBA).}$$

Ta có

$$\cos \widehat{BIJ} = \frac{JB}{IJ} = \frac{\frac{3}{4}a\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}};$$

$$S_1 = a^2 - \frac{a^2}{8} = \frac{7a^2}{8}; \text{ từ đó ta có}$$

$$S = \frac{7a^2}{8} \cdot \frac{\sqrt{19}}{3\sqrt{2}} = \frac{7a^2\sqrt{19}}{24\sqrt{2}} = \frac{7a^2\sqrt{38}}{48}.$$

V. Ta nhận xét rằng $a - \sqrt{a^2 - 1} > 0$, từ đó

$$(a - \sqrt{a^2 - 1})^2 > 0,$$

$$\text{hay } 2a^2 - 1 > 2a\sqrt{a^2 - 1} \text{ và vì } a > 1, \text{ nên } \sqrt{a^2 - 1} < a - \frac{1}{2a}.$$

Mặt khác, vì $a > 1$ nên $(a - 1)^2 < a^2 - 1$, ta có

$$a - \sqrt{a^2 - 1} = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}} < \frac{1}{a + \sqrt{(a - 1)^2}} = \frac{1}{2a - 1},$$

$$\text{hay } a - \frac{1}{2a - 1} < \sqrt{a^2 - 1}.$$

Ta có điều phải chứng minh.

Đề số 6

$$\text{I. a) } m = 1; m = \frac{35}{27}; m = 4 \pm 2\sqrt{6},$$

b) Hai điểm đó là (0,0) và (6,36).

II. Vì $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$ và $|\tan x + \cot x| \geq 2$, nên phương trình đã cho vô nghiệm.

III. Khi $m = 7$ hệ có hai nghiệm :

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$$

2) hệ phương trình có nghiệm nếu: $7 \leq m^2 \leq 63$.

IV. Diện tích của thiết diện :

$$S = \frac{l^2 \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sin 3\alpha}.$$

V. Giả sử M là một điểm bất kỳ của tứ giác. Khi đó M nhìn bốn cạnh AB, BC, CD, DA dưới bốn góc. Trong bốn góc đó phải có một góc lớn hơn hoặc bằng 90° . Khi đó, vòng tròn đường kính là cạnh đối diện với đỉnh của góc đó sẽ chứa điểm M.

Đề số 7

I. Cách giải hoàn toàn tương tự ví dụ 5, phần "Nhận dạng đặc biệt của tam giác" (Tập I).

II. Giới hạn là $y(x) = x$.

III. Hệ có nghiệm duy nhất khi :

$$m = 0, \text{ hoặc } m = -1.$$

IV. 1) Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DH tại điểm Q với

$$DQ = \frac{7a}{12}.$$

2) Bán kính hình cầu là $R = \frac{a\sqrt{41}}{8}.$

$$\text{V. Ta có : } (1+\alpha)^n + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^n \geq$$

$$\geq 2\sqrt{\left[(1+\alpha)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^n} \geq$$

$$\geq 2\sqrt{\left(2 + \alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^n} \geq 2\sqrt{(2+2)^n} = 2\sqrt{4^n} = 2^{n+1}.$$

MỤC LỤC

Phần thứ nhất: HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

	Trang
Chương I. Hàm số	3
§1. Một số khái niệm cơ bản	3
§2. Một số tính chất đặc biệt của hàm số	19
Chương II. Các bài toán định tính	54
§1. Các điểm đặc biệt đối với họ đồ thị cho trước	54
§2. Khảo sát sự tương giao giữa hai đồ thị	73
§3. Ba bài toán cơ bản về phương trình tiếp tuyến	85
§4. Quý tích đại số	101
Chương III. Các bài toán định lượng	121
§1. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số	121
§2. Một số bài toán về khoảng cách	136
Chương IV. Các bài toán định hình	146
§1. Khảo sát và vẽ đồ thị của một hàm số	146
§2. Các phép biến đổi đồ thị	226

Phần thứ hai: ĐẲNG THỨC VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

Chương I. Biến đổi đại số	245
§1. Đẳng thức đại số	245
§2. Đẳng thức có điều kiện	247
§3. Phân tích biểu thức	250
§4. Tính giá trị của biểu thức	253

Chương II. Bất đẳng thức	267
§1. Định nghĩa và các tính chất	267
§2. Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức	272
§3. Bài toán với các phương pháp giải khác nhau	303
Chương III. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất	341
§1. Ứng dụng bất đẳng thức để tìm các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số	341
§2. Một số dạng toán về cực trị có điều kiện	348
3. Bài toán với các phương pháp giải khác nhau	353
Chương IV. Ứng dụng bất đẳng thức trong phương trình và bất phương trình	374
§1. Giải và biện luận phương trình, bất phương trình bằng phương pháp so sánh	374
§2. Một số bài toán khác liên quan đến nghiệm của bất phương trình và bất phương trình	384
§3. Bài toán với các phương pháp giải khác nhau	389
Phần thứ ba: MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ LUYỆN TẬP	402

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc:

PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập:

PHẠM THÀNH HÙNG

Biên tập và sửa bản in:

MẠNH QUANG

HỒNG LIÊN

Biên tập tái bản:

LAN HƯƠNG

Trình bày bìa:

NGUYỄN MẠNH DỨA

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỌN LỌC GIẢI CÁC BÀI TOÁN SƠ CẤP, TẬP II

Mã số: 1L- 01005- 05403

**In 2000 cuốn, khổ 14,5 x 20,5 tại Công ty in Ba Đình - Bộ Công an 160 Thái Thịnh -
Đống Đa - Hà Nội. ĐT: (04) 5141329**

**Số xuất bản: 85/1553/XB-QLXB, ngày 05/11/2003. Số trích ngang: 218 KH/XE
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2003**